Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Prova scritta - 22 gennaio 2013

Esercizio 1.
Sia $X_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x^2 + tx^3 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Dire per quali valori del parametro $t > 0$ il luogo X_t è una sottovarietà liscia.

(b) Per i valori di t per cui X_t è singolare, calcolare il cono tangente nei punti singolari.

Esercizio 2.
Sia $\mathcal{S}_n$ lo spazio delle matrici simmetriche reali $n \times n$. Consideriamo l'applicazione $Q : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ definita come $Q(M) := M^2$. Calcolare punti critici e valori critici di Q.

Esercizio 3.
Sia $\lambda > 0$ e sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2,\ z > 0\}$ un semicono con vertice nell'origine O. Sia $\ell = C \cap \{y = 0\}$ una generatice di C.

(a) Dimostrare che $C \setminus \ell$ (con la metrica indotta da $\mathbb{R}^3$) è globalmente isometrico ad un aperto del piano del tipo $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r > 0,\ \theta \in (0, \alpha)\}$ e determinare α.

(b) Sia $p \in \ell$ e sia $0 \neq v \in T_pC$ che forma un angolo $\beta \in (0, \pi/2)$ con ℓ. Se $\gamma : [0, +\infty) \to C$ è la geodetica uscente da p in direzione v, dimostrare che $\gamma(t)$ raggiunge la minima distanza d da O per un unico valore di $t = t_{min}$ e calcolare tale d.
Quante volte $\gamma(t)$ interseca ℓ per $0 < t < t_{min}$?

Esercizio 4.
Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $\sigma : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie S embedded in $\mathbb{R}^3$. Sia $N(u, v)$ il vettore unitario normale a S in $\sigma(u, v)$ tale che $(\partial_u\sigma, \partial_v\sigma, N)$ sia positivamente orientata.
Per ogni $\delta \in \mathbb{R}$, definiamo $\tau_\delta : U \to \mathbb{R}^3$ come $\tau_\delta(u, v) = \sigma(u, v) + \delta N(u, v)$.

(a) Dimostrare che, se $V \subset U$ è un aperto a chiusura compatta in U, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\tau_\delta|_V$ sia la parametrizzazione di una superficie regolare per ogni $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(b) Dimostrare che, per ogni $p \in V$ e $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la forma d'area $dA(\delta)$ della superficie parametrizzata da τ_δ soddisfa $dA(\delta)_p = (1 - 2H_p\delta + K_p\delta^2)dA_p$, dove dA è la forma d'area di S.