Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Prova scritta - 21 giugno 2013

Esercizio 1.
Siano $X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 = y^3 - 1\}$ e $Y_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = tz - y\}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$. Considerare l'intersezione $C_t := X \cap Y_t$.

(a) Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il luogo C_t è non vuoto.

(b) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il luogo C_t è una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}^3$.

(c) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il luogo C_t è connesso.

Esercizio 2.
Sia $\mathcal{M}_n$ lo spazio delle matrici reali $n \times n$.
Consideriamo l'applicazione $Q : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ definita come

$$Q(M) := M^T \cdot M \,.$$

Determinare i punti critici e i valori critici di Q.

Esercizio 3.
Siano M una varietà differenziabile compatta di dimensione m. Dimostrare che, se $m < n$, ogni applicazione continua $f : M \to S^n$ è omotopa ad un'applicazione costante.

Esercizio 4.
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una sottovarietà liscia C^∞ chiusa di dimensione due, contenuta in $B(0, R) \setminus B(0, r)$, dove $0 < r < R$ (e $B(0, a)$ è la palla di raggio a centrata dell'origine). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e giustificare la propria risposta.

(a) In ogni punto p di S la curvatura gaussiana soddisfa $K_p \geq 1/R^2$.

(b) In ogni punto p di S la curvatura gaussiana soddisfa $K_p \leq 1/r^2$.

(c) Esiste un punto p di S in cui $K_p \leq 1/r^2$.

(d) Esiste un punto p di S in cui $K_p \in [1/R^2, 1/r^2]$.

(e) La curvatura gaussiana di S è positiva in ogni punto p di S.