Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Prova scritta - 18 febbraio 2013

Esercizio 1.
Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà compatta liscia e siano $X, Y \subset M$ sottovarietà compatte lisce. Sia $\mathbb{R}^n \supset U \supset M$ un intorno tubolare di M e sia $\rho : U \to M$ la sua retrazione.

(a) Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $v \in \mathbb{R}^n$ con $0 < \|v\| < \varepsilon$ tale che $X + v$ è trasversa a $\tilde{Y} := \rho^{-1}(Y)$ dentro $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $v \in \mathbb{R}^n$ con $0 < \|v\| < \varepsilon$ tale che $X_v := \rho(X + v)$ è una sottovarietà di M ed è trasversa a Y dentro M.

Esercizio 2.
Sia $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ la parametrizzazione di una curva piana e regolare e sia $\vec{n}(s)$ il vettore unitario normale in $\alpha(s)$ (tale che $(\vec{t}(s), \vec{n}(s))$ sia una base positiva di $\mathbb{R}^2$). Supponiamo che la sua curvatura $\kappa(s) \neq 0$ per ogni $s \in [a, b]$ e chiamiamo $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$$\beta(s) := \alpha(s) + \frac{\vec{n}(s)}{\kappa(s)}$$

l'*evoluta* di α.

(a) Mostrare che, per ogni $s \in [a, b]$, la retta normale a α in $\alpha(s)$ è tangente a β in $\beta(s)$.

(b) Calcolare l'evoluta della *catenaria* $\alpha(s) = (s, \cosh(s))$.

Esercizio 3.

(a) Sia S una superficie liscia, compatta, connessa e orientata, munita di una metrica riemanniana di $K > 0$. Siano inoltre $\gamma_1, \gamma_2 \subset S$ due geodetiche chiuse distinte. Dimostrare che $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$.

(b) Sia $p \in S^2$ e sia B_r il luogo dei punti di S^2 a distanza al più r da p. Se A_r è l'area di B_r e L_r è la lunghezza di ∂B_r, calcolare $4\pi A_r - L_r^2$ per $r > 0$ piccolo, a meno di $o(r^4)$

Esercizio 4.
Sia J la matrice reale $(2n \times 2n)$ definita come

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} J_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & J_2 \end{array}\right)$$

dove $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Dimostrare che $G = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^T J M = J\}$ è una sottovarietà di $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione. *[Sugg.: guardare un punto speciale di G...]*

(b) Dimostrare che $H = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^{-1} J M = J\}$ è una sottovarietà di $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione. *[Sugg.: pensare a J_2...]*