Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Prova scritta - 18 aprile 2013

Esercizio 1.
Sia $X_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x^2 + y^4 + tz^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il luogo X_t è una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}^3$.

(b) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il luogo X_t è compatto.

Esercizio 2.
Sia $\mathcal{S}_n$ lo spazio delle matrici simmetriche reali $n \times n$.
Consideriamo l'applicazione $T : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ definita come

$$T(M) := \mathrm{tr}(M^2 + M)\,.$$

Calcolare il differenziale di T e determinare i punti critici e valori critici di T.

Esercizio 3.
Siano $a > r > 0$ e sia $S \subset \mathbb{R}^3$ il toro di rivoluzione ottenuto ruotando la curva $C = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x - a)^2 + z^2 = r^2\}$ attorno all'asse z.

(a) Descrivere S usando una sola equazione in (x, y, z).
Parametrizzare S usando $(\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1$.

(b) Dire se le curve γ_1, γ_2, γ_3 ottenute ruotando $P_1 = (a + r, 0, 0)$, $P_2 = (a - r, 0, 0)$, $P_3 = (a, 0, r)$ attorno all'asse z siano geodetiche oppure linee di curvatura (ossia tali che i loro vettori tangenti siano direzioni di curvatura principale).

Esercizio 4.

(a) Enunciare il lemma di Sard.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto e sia $h : U \to \mathbb{R}$ un'applicazione C^∞. Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ definiamo $h_v : U \to \mathbb{R}$ come $h_v(x) := h(x) + \langle v, x\rangle$. Dimostrare che l'insieme

$$\Omega = \{v \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathrm{Hess}_{x_0}(h_v) \text{ è non degenere per ogni punto critico } x_0 \text{ di } h_v\}$$

è denso in $\mathbb{R}^m$.
[Suggerimento: usare trasversalità parametrica con la mappa $(v, x) \mapsto (\mathrm{grad}\, h_v)_x$*.]*