Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Prova scritta - 15 luglio 2013

Esercizio 1.
Siano $X_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 2ty = z + \frac{1}{2}\}$ e $Y_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - xy = t\}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$. Considerare l'intersezione $C_t := X_t \cap Y_t$.

(a) Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il luogo C_t è non vuoto.

(b) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il luogo C_t è una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}^3$.

(c) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il luogo C_t è connesso.

Esercizio 2.
Consideriamo l'applicazione $\mathcal{C} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n$ definita come

$$\mathcal{C}(A, X) := XAX^{-1}\,.$$

Calcolare il differenziale di $\mathcal{C}$ e determinare i valori critici di $\mathcal{C}$.

Esercizio 3.
Sia $n \geq 1$.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e giustificare la propria risposta.

(a) La varietà $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ è orientabile.

(b) Sia $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ liscia e sommersiva e sia $t \in \mathbb{R}$ nell'immagine di F.
Allora $F^{-1}(t)$ è orientabile.

(c) Sia M una varietà liscia di dimensione n.
Allora il suo fibrato tangente TM è orientabile (come varietà).

Esercizio 4.
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una sottovarietà liscia C^∞ chiusa e senza bordo, contenuta in $B(0, R) \setminus B(0, r)$, dove $0 < r < R$ e $B(0, \rho)$ è la palla di raggio ρ centrata dell'origine.
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e giustificare la propria risposta.

(a) Esiste un punto p di S in cui la curvatura media soddisfa $|H_p| \geq \frac{1}{R}$.

(b) Esiste un punto p di S in cui la curvatura gaussiana soddisfa $K_p \leq \frac{1}{r^2}$.

(c) La curvatura media di S soddisfa $|H_p| \leq \frac{1}{r}$ per ogni $p \in S$.

(d) Si ha sempre $\displaystyle\int_S H^2\, dA \geq \int_S K\, dA$, dove dA è la forma d'area indotta su S dalla metrica ambiente.