Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Prova scritta - 13 novembre 2013

Esercizio 1.
Siano $X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 6x^3 + y^2 + z^2 = 15\}$ e $Y_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xz = t\}$ con $t \in \mathbb{R}$.

(a) Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il luogo $X \cap Y_t$ è una sottovarietà liscia.

(b) Dire se $X \cap Y_1$ è compatto.

Esercizio 2.
Sia $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z^2 = x^2 + y^2\}$.

(a) Calcolare la curvatura geodetica e la curvatura normale della curva γ ottenuta sezionando C con il piano $z = 9$.

(b) Determinare tutte le geodetiche chiuse che giacciono su C.

Esercizio 3.
Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme chiuso con la seguente proprietà:

$$\text{se } p \in X \text{ e } t \in \mathbb{R}, \text{ allora } tp \in X$$

(a) Supponiamo che $X \neq \mathbb{R}^n$ sia una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}^n$.
Dimostrare che allora X è contenuto in un iperpiano di $\mathbb{R}^n$.

(b) Dire se, sotto le ipotesi di (a), X deve necessariamente essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 4.
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una sottovarietà C^∞ compatta di dimensione 2 e sia $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ un campo continuo di vettori normali unitari.

(a) Dimostrare che, per ogni funzione differenziabile $r : S \to \mathbb{R}$, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che l'applicazione $\Phi_t : S \to \mathbb{R}^3$ definita da $\Phi_t(p) = p + t \cdot r(p)\nu(p)$ è un'embedding per ogni $|t| < \varepsilon$.

(b) Per ogni funzione $r \in C^\infty(S, \mathbb{R})$, calcolare la variazione prima dell'area di $\Phi_t(S)$

$$A' = \frac{d}{dt} A(\Phi_t(S))\Big|_{t=0}$$

in termini di r, della prima e della seconda forma fondamentale di S.

(c) Dare condizioni necessarie e sufficienti (in termini di prima e seconda forma fondamentale di S) affinché tale A' si annulli per ogni funzione r.