Geometria differenziale
Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 9

Esercizio 1 (superfici di rotazione).
Sia $\gamma(u) = (\rho(u), 0, h(u))$ la parametrizzazione di una curva regolare C in $\mathbb{R}^3$ con $\rho, h : [0, b] \to \mathbb{R}$ contenuta nel piano xz, e assumiamo $\rho(u) > 0$ per ogni u. Sia S la superficie ottenuta ruotando C rispetto all'asse z.

(a) Determinare σ in modo tale che $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ sia una parametrizzazione di S. Esprimere la prima e la seconda forma fondamentale, le curvatura media e gaussiana, in termini della parametrizzazione σ.

(b) Calcolare la curvatura geodetica dei *meridiani* (ossia, le curve ottenute ruotando C di un angolo costante v) e dei *paralleli* (ossia, le curve con u costante).

(c) Dimostrare che meridiani e paralleli sono *linee di curvatura* per S, ossia i loro vettori tangenti sono direzioni di curvatura principali.

(d) Determinare l'area di S in funzione di ρ nel caso in cui $h(u) = u$.

(e) Mostrare che tutti i punti di S sono parabolici (non planari) $\iff$ S è conutenta in un cilindro circolare oppure in un cono circolare.

(f) Supponiamo che u sia un parametro d'arco per γ, che $K \equiv 1$ costante e che S intersechi ortogonalmente il piano xy. Dimostrare che

$$\rho(u) = C\cos(u), \quad h(u) = \int_0^u \sqrt{1 - C^2 \sin^2(t)}dt$$

dove $C = \rho(0)$ è una costante opportuna.

(g) Supponiamo che u sia un parametro d'arco per γ, che $K \equiv -1$ costante e che S intersechi ortogonalmente il piano xy. Dimostrare che

$$\rho(u) = C\cosh(u), \quad h(u) = \int_0^u \sqrt{1 - C^2 \sinh^2(t)}dt$$

con $C = \rho(0)$ costante opportuna.

Esercizio 2.
Siano $a, b, c > 0$. Determinare i punti ombelicali dell'*ellissoide* in $\mathbb{R}^3$ di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Esercizio 3.
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Dimostrare che, se esiste un segmento passante per p contenuto in S, allora p è un punto parabolico. È vero il viceversa?
Esiste una superficie S con un punto p parabolico isolato?

Esercizio 4.

(a) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e compatta. Dimostrare che esiste un aperto non vuoto di S su cui $K > 0$.
[Suggerimento: fissato un punto $q \in \mathbb{R}^3$, considerare la più piccola sfera di centro in q che contenga la superficie S.]

(b) Dimostrare che non esistono superfici minime compatte in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5 (superfici minime).
Sia $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare di una superficie S. Assumiamo che σ sia *conforme* (nel qual caso le coordinate (u,v) si dicono *isoterme*), ossia che la prima forma fondamentale soddisfi $E = G$ e $F = 0$.

(a) Dimostrare che $EH\hat{n} = \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2}$.

(b) Dimostrare che S è una superficie minima se e solo se ciascuna componente σ_i è una funzione armonica (ossia $\Delta \sigma_i = 0$ per ogni $i = 1,2,3$).

(c) Verificare che il *catenoide* $\sigma(u,v) = (a\cosh(u)\cos(v), a\cosh(u)\sin(v), au)$ è una superficie minima (a è un parametro). Dimostrare che il catenoide è l'unica superficie minima di rotazione.

(d) Verificare che l'*elicoide* $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = (av\cos(u), av\sin(u), u)$ è una superficie minima di $\mathbb{R}^3$ e determinarne le linee di curvatura.

(e) Sia $N : S \to S^2$ la mappa di Gauss di $S \subset \mathbb{R}^3$ e sia $B = -DN$ l'operatore "forma". Dimostrare che $B^2 - H \cdot B + K \cdot Id = 0$, come operatori sullo spazio tangente di S.
Sia III la terza forma fondamentale di $S \subset \mathbb{R}^3$, ossia la forma quadratica che esprime in coordinate la metrica riemanniana $N^*(g_{S^2})$ ottenuta come pull-back della metrica di S^2 tramite la mappa di Gauss di S. Dimostrare che $\mathit{III} = BIB$, dove $B = -DN$, e concludere che $\mathit{III} - H\mathit{II} + KI = 0$ come forme quadratiche. Dedurne che la superficie S è minima se e solo se la sua mappa di Gauss è conforme (dove $K \neq 0$).

Esercizio 6.
Descrivere le regioni di S^2 nell'immagine della mappa di Gauss associata alle seguenti superfici in $\mathbb{R}^3$:

(a) paraboloide di rivoluzione $\mathcal{P} = \{z = x^2 + y^2\}$;

(b) iperboloide di rivoluzione $\mathcal{H} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$;

(c) catenoide $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$.

Esercizio 7.
Considerare la mappa di Mercatore $\mu : S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to C$ data dalla proiezione in direzione ortogonale all'asse z, dove C è il cilindro circolare di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Dimostrare che μ è una mappa conforme ma non preserva l'area.

(b) Dimostrare che esiste un diffeomorfismo $h : (-1,1) \to \mathbb{R}$ tale che la composizione $\sigma \circ \mu : S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to C$ preservi la forma d'area, dove $\sigma(x,y,z) = (x,y,h(z))$. Notare che $\sigma \circ \mu$ non è conforme.

(c) Dimostrare che una mappa $f : S \to S'$ conforme e che preservi le aree fra superfici di $\mathbb{R}^3$ è necessariamente un'isometria.