Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 8

<u>Esercizio 1</u>.
Sia C una curva piana chiusa e regolare.

(a) Supponiamo che C sia contenuta dentro un disco di raggio r. Dimostrare che esiste un punto $p \in C$ in cui la curvatura di C in p soddisfa $|\kappa| \geq 1/r$.

(b) Supponiamo che esista una costante $c > 0$ tale che la curvatura di C soddisfi $0 < \kappa \leq c$ in ogni punto di C. Dimostrare che la lunghezza di C soddisfa $\ell(C) \geq 2\pi/c$.

<u>Esercizio 2</u>.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare e non degenere in parametro d'arco s.
Dimostrare che la torsione di γ soddisfa

$$\tau(s) = -\frac{\dot{\gamma}(s) \times \ddot{\gamma}(s) \cdot \dddot{\gamma}(s)}{\kappa(s)^2}\,.$$

Esercizio 3.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare e non degenere e sia $P \in \mathbb{R}^3$ un punto fissato. Supponiamo che, per ogni $t \in [a,b]$, la retta normale a γ in $\gamma(t)$ (ossia in direzione $\hat{n}(t)$) passi per P.
Dimostrare che $\gamma([a,b])$ è contenuta in una circonferenza.

Esercizio 4. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva in parametro d'arco, non degenere e con $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in [a,b]$. Mostrare che la conoscenza del vettore normale unitario $\hat{n}(s)$ per ogni $s \in [a,b]$ determina la curvatura $\kappa(s)$ e la torsione $\tau(s)$ di γ.

Esercizio 5.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare in parametro d'arco s, tale che $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in [a,b]$. Sia $C = \gamma([a,b])$.

(a) Dimostrare che, se C giace su una sfera, allora

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2}\right) \qquad (\star)$$

[Suggerimento: se la sfera ha centro P e raggio r, allora $(\gamma(s) - P) \cdot (\gamma(s) - P) = r^2$. Differenziare più volte.]

(b) Dimostrare che, se vale $(\star)$, allora esiste una costante $r > 0$ tale che

$$R^2 + (\dot{R}T)^2 = r^2$$

dove $R = 1/\kappa$ e $T = 1/\tau$. Dedurne che C giace su una sfera di raggio r.
[Suggerimento: considerare il punto $\gamma + R\hat{n} + \dot{R}T\dot{b}$.]