Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 7

Esercizio 1.
Sia M una varietà C^∞, sia $X \subset M$ un suo sottoinsieme e $i : X \hookrightarrow M$ l'inclusione. Per ogni $p \in X$ il *cono tangente* $C_p(X)$ *a* X *in* p è definito come l'insieme della classi di equivalenza di germi di cammini $\gamma : I \to X$ tali che: $0 \in I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto, $\gamma(0) = p$ e $i \circ \gamma : I \to M$ è C^∞, dove due germi γ_1, γ_2 definiscono lo stesso punto in $C_p(X)$ se e solo se $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0) \in T_p(M)$.

(a) Dimostrare che $C_p(X) \subseteq T_p(M)$ è un $\mathbb{R}_+$-cono, ossia che: $v \in C_p(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \implies \lambda v \in C_p(X)$.

(b) Calcolare il cono tangente in P alle seguenti sottospazi $X \subset M$:

$$
\begin{array}{rlll}
P = (0,0) \in & X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\} & \subset M = \mathbb{R}^2 & \\
P = (0,0) \in & X_{b,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(x-b)(x-c)\} & \subset M = \mathbb{R}^2 & \text{con } b, c \in \mathbb{R} \\
P = (0,0,0) \in & X_q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) = 0\} & \subset M = \mathbb{R}^3 & \text{con } q \text{ forma quadratica}
\end{array}
$$

(c) Dimostrare che, se $C_p(X)$ non è un sottospazio vettoriale di $T_p(M)$, allora X non sia una sottovarietà di M vicino a p (ossia: nessun intorno di p in X è una sottovarietà C^∞ di M). Mostrare tuttavia che può accadere che $C_p(X) \subset T_p(M)$ sia una sottospazio vettoriale e tuttavia X non sia una sottovarietà di M vicino a p.

Esercizio 2.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una parametrizzazione regolare di una curva piana. Dimostrare che la sua curvatura in $\gamma(t)$ è data da

$$\kappa(t) = \frac{\langle \ddot{\gamma}(t), J\dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

Esercizio 3.
Siano date le curve piane seguenti

$$
\begin{aligned}
S &= \{\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\
C &= \{\gamma(t) = (t^3, \cosh(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\
D &= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid r(p) = \sin(\theta(p)) \cos(\theta(p)),\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\} \quad [1]
\end{aligned}
$$

(a) Dire se S, C, D siano sottovarietà lisce di $\mathbb{R}^2$: se no, trovarne i punti singolari e i coni tangenti nei punti singolari.

(b) Determinare equazioni che definiscano S e C e una parametrizzazione di D del tipo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Parametrizzare S in parametro d'arco.

(c) Calcolare la curvatura di S, C, D nei loro punti lisci.

[1] Ovviamente (r, θ) sono le coordinate polari su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4.
Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1 + z^2\} \subset \mathbb{R}^3$ e orientiamo X dichiarando che $n = (1, 0, 0)$ sia il vettore unitario normale positivo in $(1, 0, 0) \in X$.

(a) Usando come carta la proiezione sul piano xy, scrivere la metrica e la forma d'area indotte dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$ su X nelle coordinate xy.

(b) Verificare il teorema di Stokes sulla varietà $M = \{x^2 + y^2 < 1 + z^2,\ 0 < z < 1\}$ dotata dell'orientazione indotta da $\mathbb{R}^3$ per la forma $\alpha = z dx \wedge dy$. *[Trascurare il fatto che M abbia spigoli: in questo caso Stokes funziona comunque.]*

Esercizio 5. Sia $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una ipersuperficie liscia (ossia una sottovarietà C^∞ di codimensione 1) e chiamiamo g la metrica riemanniana su M indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^{n+1}$. Supponiamo che $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ sia una campo C^∞ di vettori normali unitari e muniamo M dell'orientazione indotta da ν e dall'orientazione standard di $\mathbb{R}^{n+1}$.
Se $\Omega = dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$ è la forma di volume standard su $\mathbb{R}^{n+1}$, definiamo $\omega := \iota_\nu \Omega$ come

$$\omega_p(v_1, \ldots, v_n) := \Omega(\nu, v_1, \ldots, v_n) \qquad [2]$$

per ogni $p \in M$ e $v_1, \ldots, v_n \in T_p(M)$.

(a) Dimostrare che ω è una n-forma differenziale C^∞ su M e in effetti è la forma di volume associata a g e all'orientazione data su M.

(b) Supponiamo M compatta e sia $U_\epsilon \subset \mathbb{R}^{n+1}$ l'intorno tubolare di M di spessore $\epsilon > 0$ piccolo. Dimostrare che

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^{n+1}}(U_\epsilon) = 2\epsilon \cdot \mathrm{Vol}_g(M) + O(\epsilon^2) \qquad (\star)$$

(c) Come deve essere modificata la formula $(\star)$ nel caso in cui M sia una sottovarietà di codimensione k arbitraria?

[2] Ricordiamo che, se $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$ è una m-forma differenziale e $\eta_1, \ldots, \eta_m$ sono campi vettoriali, allora $\alpha(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ è la funzione definita da

$$\alpha(\eta_1, \ldots, \eta_m) = f \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) dx_{i_1}(\eta_{\sigma(1)}) \cdots dx_{i_m}(\eta_{\sigma(m)}) \,.$$