Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 6

Esercizio 1.
Considerare la sfera unitaria S^2 e siano θ, ϕ le "coordinate" sferiche longitudine e latitudine.

(a) Cerchiamo 1-forme differenziali continue e chiuse α e β tali che, in ogni piccolo dischetto Δ (interamente contenuto nel loro dominio di definizione) si abbia

$$\int_p^q \alpha = \theta(q) - \theta(p), \qquad \int_p^q \beta = \phi(q) - \phi(p) \qquad \forall p, q \in \Delta$$

Determinare sottoinsiemi massimali di S^2 sui quali è possibile definire α e β.

(b) Dire se tali α e β sono esatte.

(c) Siano x, y, z le coordinate standard su $\mathbb{R}^3$ e chiamiamo $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ la restrizione di tali funzioni a $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Determinare un sottoinsieme massimale $U \subset \mathbb{R}^3$ sul quale è possibile esprimere $d\bar{z}$ in funzione di $d\bar{x}$ e $d\bar{y}$.

(d) Esprimere in ogni punto (del loro dominio) α e β in funzione di $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, $d\bar{z}$. Notare che tale espressione non è unica, ma vale ovunque. Dove e come è possibile esprimere α e β in funzione solo di $d\bar{x}$ e $d\bar{y}$?

Esercizio 2.
Sia $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ un'embedding C^∞ e sia $C = \gamma(S^1)$. Parametrizziamo S^1 con $t \mapsto \exp(2\pi i t)$.

(a) Sia $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. Dimostrare che quasi tutte le semirette uscenti da p intersecano C trasversalmente.

(b) Sia $G(t) := \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$. Dimostrare che $X = \{\gamma(t) + s\dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{G}(t) = 0,\ t, s \in \mathbb{R}\}$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^2$. *[Suggerimento: identificare X con il luogo dei valori critici della mappa $F : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(t, s) = \gamma(t) + s\dot{\gamma}(t)$.]*

(c) Sia $p \in \mathbb{R}^2 \setminus (C \cup X)$. Scelta una semiretta L uscente da p e che intersechi C trasversalmente, definiamo $n(p, L) := |C \cap L|$. Dimostrare che la parità di $n(p, L)$ è indipendente dalla scelta di L: chiameremo $n(p)$ la classe di $n(p, L)$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(d) Dimostrare che, per ogni $q \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$ di q tale che $n(p) = n(p')$ per ogni $p, p' \in U \setminus X$. *[Notare che q può appartenere a $X \setminus C$: in tal caso possiamo quindi definire $n(q) := n(p)$ dove $p \in U \setminus X$.]*

(e) Dimostrare che la curva C sconnette $\mathbb{R}^2$ in due componenti connesse per archi: di cui una limitata e l'altra illimitata.

Esercizio 3.
Sia $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ il semipiano iperbolico con la sua metrica standard $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

(a) Calcolare la lunghezza della seguenti curve: $\gamma(t) = (x, t)$ con $t \in [a, b]$ con $0 < a < b$; $\alpha(t) = (t, y)$ con $t \in [a, b]$ con $a < b$; $\beta(t) = (\sin t, \cos(t))$ con $t \in [0, \theta]$ e $\theta < \pi/2$.

(b) Sia b un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che gli angoli misurati con b coincidono con gli angoli misurati con il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$ se e solo se b è un multiplo del prodotto scalare standard. Dedurre che due metriche riemanniane g_1, g_2 su una superficie S sono conformemente equivalenti (ossia gli angoli misurati con l'una o con l'altra coincidono) se e solo se esiste una funzione positiva $\lambda : S \to \mathbb{R}^+$ tale che $g_1 = \lambda g_2$.

(c) Considerare la regione di $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ definita, nella coordinata complessa z, come

$$\Omega = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r \in [1, e^t],\ \theta \in [\eta, \pi/2]\}$$

Considerare il diffeomorfismo $E : R = [0,t] \times [\eta, \pi/2] \to \Omega$ definito come $E(u,v) = e^{u+iv}$. Scrivere $E^*(g)$ in termini di u, v e dire se $E^*(g)$ è conformemente equivalente alla metrica euclidea su R.

<u>Esercizio 4</u>. Sia b un prodotto scalare definito positivo sullo spazio vettoriale reale V. Sia $(u_1, \ldots, u_n)$ una base b-ortonormale per V e sia $\omega := u_1 \wedge \cdots \wedge u_n \in \Lambda^n(V^*)$.

(a) Dimostrare che l'accoppiamento

$$\Phi : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definito da $\Phi(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \det(\varphi_i(v_j))_{i,j}$ è bilineare e perfetto e quindi induce un isomorfismo $\Lambda^k(V)^* \cong \Lambda^k(V^*)$.

(b) Presi $\alpha \in \Lambda^k(V)$ e $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$, chiamiamo $\Psi(\alpha, \beta)$ come l'unico numero reale tale che $\alpha \wedge \beta = \Psi(\alpha, \beta)\omega$. Dimostrare che l'accoppiamento così definito

$$\Psi : \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è bilineare e perfetto e quindi induce un isomorfismo $\Lambda^k(V) \cong \Lambda^{n-k}(V)^*$.

(c) Chiamiamo con lo stesso simbolo $\# : V \to V^*$ e $\# : V^* \to V$ gli isomorfismi indotti da b. Sia

$$* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)^* \to \Lambda^{n-k}(V^*) \to \Lambda^{n-k}(V)$$

l'applicazione ottenuta componendo l'isomorfismo indotto da Ψ con Φ^{-1} e usando l'isomorfismo $\#$. Dimostrare che $** = (-1)^{k(n-k)} id_{\Lambda^k(V)}$.

(d) Supponiamo $\dim(V) = 3$. Dimostrare che

$$\times : V \times V \longrightarrow V$$

definito da $v \times w := *(v \wedge w)$ è un accoppiamento bilineare alterno non degenere, che si riduce al prodotto vettore classico quando $V = \mathbb{R}^3$ e b è la metrica euclidea.

<u>Esercizio 4bis</u>.
Sia (M, g) una varietà riemanniana. (In ogni punto p di M, usiamo le notazioni e i risultati dell'esercizio 4 precedente applicati a $V = T_p(M)$ e $b = g_p$.)

(a) Data $f : M \to \mathbb{R}$, chiamiamo $\mathrm{grad}(f) := \#df$ il *gradiente* di f. Dato un campo vettoriale η su M, chiamiamo $\mathrm{div}(\eta) := *d*\#\eta$ la *divergenza* di η. Dimostrare che, se $M = \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea, le definizioni di gradiente e divergenza coincidono con quelle usuali, così come quella di *laplaciano* $\Delta f := \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = *d*df$.

(b) Supponiamo $\dim(M) = 3$. Dimostrare che il *rotore* di η definito come $\mathrm{rot}(\eta) := \# * d\#\eta$ soddisfa $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ e $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\eta)) = 0$ per ogni $\eta \in \mathcal{X}(M)$.

(c) Se $M = \mathbb{R}^3$ con la metrica euclidea, dimostrare che la definizione di rotore coincide con quella usuale.

(d) Usare il teorema di Stokes per il ridimostrare i teoremi di Gauss-Green, vecchio Stokes (per una superficie con bordo immersa in $\mathbb{R}^3$) e della divergenza.