Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 5

Esercizio 1. Sia $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Considerare la struttura di algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = T_{id}G$ data dall'identificazione

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^L(G) & \longrightarrow & T_{id}G \\ \eta & \longmapsto & \eta(id) \\ \eta_A & \longleftarrow\!\shortmid & A \end{array}$$

e dalla parentesi di Lie $[\cdot,\cdot]$ sui campi vettoriali su G invarianti a sinistra.

(a) Dimostrare che, se $A, B \in \mathfrak{g}$, allora $[A, B] = AB - BA$.

(b) Dato $A \in \mathfrak{g}$, determinare il flusso Φ^A su G generato da A.

Esercizio 2.

(a) Determinare le curve integrali dei seguenti campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$:

$$\eta_1(x,y) = (x,y), \quad \eta_2(x,y) = (-y,x), \quad \eta_3(x,y) = (y,x)$$

(b) Siano $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ fissati. Determinare un campo vettoriale η su $\mathbb{R}^2$ che abbia per curve integrali

$$\gamma_c(t) = (\pm e^{\lambda_1 t}, c\, e^{\lambda_2 t}),$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

(c) Calcolare le parentesi $[\eta_i, \eta_j]$ con $i, j = 1, 2, 3$.

Esercizio 3.

(a) Sia n dispari. Dimostrare che esistono campi vettoriali tangenti e mai nulli su S^n.

(b) Sia n qualunque. Supponiamo che esista un campo vettoriale η mai nullo su S^n. Dimostrare che è possibile costruire un'omotopia fra $id : S^n \to S^n$ e la mappa antipodale $A : S^n \to S^n$ data da $A(x) = -x$.

Esercizio 4. Siano η, μ due campi vettoriali sulla varietà M e siano Φ_t, Ψ_s il flussi generati da η e da μ rispettivamente.

(a) Dimostrare che

$$[\eta,\mu](p) = \frac{d}{dh}\Psi_{-\sqrt{h}}\Phi_{-\sqrt{h}}\Psi_{\sqrt{h}}\Phi_{\sqrt{h}}(p)\Big|_{h=0}$$

per ogni $p \in M$.
[La dimostrazione è un po' contosa: può essere utile scriversi in coordinate $\Psi_{-s'}\Phi_{-t'}\Psi_s\Phi_t(p) - p$ come $(\Psi_{-s'} - Id)(\Phi_{-t'}\Psi_s\Phi_t(p)) + (\Phi_{-t'} - Id)(\Psi_s\Phi_t(p)) + (\Psi_s - Id)(\Phi_t(p)) + (\Phi_t - Id)(p)$, poi usare uno sviluppo di Taylor al primo ordine e infine valutare tutto in $s = t = s' = t' = \sqrt{h}$.]

(b) Dimostrare che $[\eta, \mu] = 0 \iff$ i flussi commutano, ossia $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ per ogni s, t per i quali entrambi i membri dell'uguaglianza siano definiti.

(c) Dimostrare che, se $x_1, \dots, x_n$ sono coordinate locali su un aperto$U \subset M$, allora i flussi $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ generati dai campi vettoriali $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ commutano.

Esercizio 5.

Sia $\pi : X \to Y$ una mappa propria e sommersiva fra varietà C^∞ e supponiamo Y connessa.

(a) Sia $Y = (-1,1)$. Dimostrare che esiste un diffeomorfismo $\Phi : X \to F \times (-1,1)$ dove $F = \pi^{-1}(0)$ tale che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \times (-1,1) \arrow[dl] \\ & (-1,1) & \end{tikzcd}$$

commuti, dove la mappa $F \times (-1,1) \to (-1,1)$ è la proiezione sul secondo fattore. *[Prendere il campo vettoriale $\frac{\partial}{\partial t}$ su $(-1,1)$, sollevarlo ad un campo vettoriale su X e poi considerarne il flusso.]*

(b) Sia $Y = (-1,1)^n$. Dimostrare che esiste un diffeomorfismo $\Phi : X \to F \times (-1,1)^n$ dove $F = \pi^{-1}(0)$ tale che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \times (-1,1)^n \arrow[dl] \\ & (-1,1)^n & \end{tikzcd}$$

commuti. *[Procedere per induzione, una coordinata di $(-1,1)^n$ alla volta.]*

(c) Sia Y qualunque connesso. Dimostrare che, per ogni $y \in Y$, esiste un intorno $U \subset Y$ di y e un diffeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to F \times U$ dove $F = \pi^{-1}(y)$ tale che

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \times U \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

commuti.