Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 4

Esercizio 1. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà C^∞ di dimensione m.

(a) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} G: \ X &\longrightarrow Gr(m, \mathbb{R}^n) \\ p &\longmapsto T_pX \end{aligned}$$

è di classe C^∞.

(b) Per ogni $p \in X$ definiamo $(T_pX)^\perp$ come l'ortogonale di T_pX dentro $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Dimostrare che

$$(TX)^\perp := \bigcup_{p \in X} (T_pX)^\perp$$

è una sottovarietà C^∞ di $T\mathbb{R}^n$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 2. Sia X una varietà C^∞ di dimensione n e sia $Y \subset X$ una sottovarietà C^∞ di dimensione m.

(a) Dimostrare che il quoziente (detto *fibrato in sfere associato a* TX)

$$\mathbb{S}TX := \{(p, v) \in TX \mid 0 \neq v\}/\sim$$

ha una struttura naturale di varietà C^∞, dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita come: $(p, v) \sim (q, w)$ se e solo se $p = q$ ed esiste $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tale che $v = \lambda w$.

(b) Dimostrare che il quoziente (detto *fibrato in proiettivi associato a* TX)

$$\mathbb{P}TX := \{(p, v) \in TX \mid 0 \neq v\}/\sim$$

ha una struttura naturale di varietà C^∞, dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita come: $(p, v) \sim (q, w)$ se e solo se $p = q$ ed esiste $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $v = \lambda w$.

(c) Dimostrare che

$$TX|_Y := \{(p, v) \in TX \mid p \in Y\}$$

è una sottovarietà C^∞ di TX e che l'applicazione naturale $TX|_Y \to Y$ è C^∞.

(d) Considerando che $TY \subset TX$, dimostrare che

$$N_{Y/X} := \bigcup_{p \in Y} (N_{Y/X})_p, \text{ dove } (N_{Y/X})_p := T_pX/T_pY$$

ha una naturale struttura di varietà C^∞ (e si chiama *fibrato normale a* Y *dentro* X) e le applicazioni naturali

$$TX|_Y \to N_{Y/X}, \qquad \pi : N_{Y/X} \to Y$$

sono C^∞.

(e) Sia $X = \mathbb{R}^n$. Dimostrare che l'applicazione naturale

$$\begin{aligned} (TY)^\perp &\longrightarrow N_{Y/\mathbb{R}^n} \\ v &\longmapsto [v] \end{aligned}$$

è un diffeomorfismo C^∞.

Esercizio 3. Sia $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 = 1 + z^2\}$.

(a) Poste su $T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ le coordinate naturali $x, y, z, \alpha = \frac{\partial}{\partial x}, \beta = \frac{\partial}{\partial y}, \gamma = \frac{\partial}{\partial z}$, determinare le equazioni che descrivono $TX \subset T\mathbb{R}^3$ in termini di $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

(b) Determinare le equazione che descrivono $(TX)^\perp$ dentro $T\mathbb{R}^3$ in termini di $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

Esercizio 4. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà C^∞ di dimensione m. Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi :\ (TX)^\perp &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (p,v) &\longmapsto p + v \end{aligned}$$

è C^∞ e il suo differenziale $D\Phi_{(p,0)}$ ha rango massimo per ogni $p \in X$.

Esercizio 5. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà C^∞ compatta di dimensione m. Per ogni $r > 0$ sia

$$(TX)^\perp(r) := \{(p,v) \in (TX)^\perp \mid \|v\| < r\} \subset (TX)^\perp$$

(a) Dimostrare che, esiste $r > 0$ piccolo abbastanza tale che la restrizione di Φ a $(TX)^\perp(r)$ è iniettiva. *[Può essere utile procedere per assurdo.]*

(b) Concludere che tale restrizione di Φ è un diffeomorfismo su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ che contiene X. Dimostrare che tale U contiene tutti i punti di $\mathbb{R}^n$ a distanza minore di r da X.

(c) Concludere che esiste $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto che contiene X (detto *intorno tubolare di* X) e un'applicazione C^∞

$$\rho : U \times [0,1] \longrightarrow U$$

tale che

- $\rho(p,0) = p$ e $\rho(p,1) \in X$ per ogni $p \in U$;
- $\rho(x,t) = x$ per ogni $x \in X$ e $t \in [0,1]$;
- $\rho(\cdot,t) : U \to U$ è un diffeomorfismo su un aperto per ogni $t < 1$.

Esercizio 6. Siano $X \in \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ due sottovarietà compatte.

(a) Siano $F, G : X \to Y$ applicazioni continue tali che $\|F(p) - G(p)\| < r$ per ogni $p \in X$. Dimostrare che F e G sono omotope. *[Usare la retrazione dell'intorno tubolare.]*

(b) Sia $F : X \to Y$ un'applicazione continua. Dimostrare che esiste un'applicazione $\tilde{F} : X \to Y$ di classe C^∞ omotopa a F. *[Usare Stone-Weierstrass e poi il punto (a).]*