Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 2

Esercizio 1. Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ il quadrato. Dimostrare che esiste una $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ con immagine esattamente Q.

Esercizio 2. Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti e sia $F : U \to V$ un'applicazione C^∞. Dimostrare che, se il differenziale di F è suriettivo in ogni punto di U, allora F è un'applicazione aperta.

Esercizio 3. Trovare aperti $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ e una $F : U \to V$ di classe C^∞ suriettiva, non iniettiva, e con differenziale invertibile in ogni punto di U.

Esercizio 4. (Partizione C^∞ dell'unità su varietà.)

(a) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Dimostrare che esistono aperti $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ tali che $\bigcup_m K_m = U$ e $\overline{K}_m \subset K_{m+1}$.

(b) Sia X una varietà topologica. Dimostrare che X contiene un sottoinsieme denso e numerabile. Dimostrare che X ammette un atlante numerabile.

(c) Dimostrare che esistono aperti $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset X$ tali che $\bigcup_m K_m = X$ e $\overline{K}_m \subset K_{m+1}$. *[Usare la base numerabile di X e i punti (a)-(b) precedenti.]*

(d) Sia X una varietà C^∞ e sia $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto di X. Dimostrare che esiste una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}$. *[Passare ad un ricoprimento di carte locali, ciascuna contenuta in qualche U_i.]*

(e) Sia X una varietà C^∞ e siano $Y, Z \subset X$ chiusi disgiunti. Dimostrare che esiste $f : X \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ che valga costantemente 1 su Y e costantemente 0 su Z.

Esercizio 5. Sia Y una varietà C^∞.

(a) Sia $f : X \to Y$ un omeomofismo. Dimostrare che esiste un'unica struttura C^∞ su X tale che f sia un diffeomorfismo C^∞.

(b) Sia $\pi : X \to Y$ un rivestimento. Dimostrare che esiste un'unica struttura C^∞ su X tale che π sia un diffeomorfismo locale C^∞.

Esercizio 6. Sia $X_k \subset \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici reali $n \times m$ di rango esattamente $k \leq \min\{n, m\}$. Sia inoltre $U \subset X_k$ il sottoinsieme delle matrici il cui minore in alto a sinistra di ordine k sia invertibile.

(a) Dimostrare che U è un aperto di X.

(b) Dimostrare che U è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^N$ con $N = k(n + m - k)$.

(c) Dimostrare che X_k può essere munita di un atlante C^∞ di dimensione N.

(d) Dimostrare che X è connessa se e solo se $[n \neq m$ oppure $k < n = m]$.

Esercizio 7*. Sia X una varietà C^∞.

(a) Sia $p \in X$. Dimostrare che $m_p := \{f \in C^\infty(X, \mathbb{R}) \mid f(p) = 0\}$ è un ideale massimale dell'anello $C^\infty(X, \mathbb{R})$.

(b) Dimostrare che, se $I \subset C^\infty(X, \mathbb{R})$ è un ideale massimale, allora $I = m_p$ per qualche $p \in X$.

Esercizio 8. Siano M e N due varietà C^∞. Dimostrare che esiste un'unica struttura C^∞ su $M \times N$ tale che

- le proiezioni $M \times N \to M$ e $M \times N \to N$ sono C^∞;
- per ogni varietà differenziabile Z e per ogni coppia di mappe C^∞ $f : Z \to M$ e $g : Z \to N$, l'applicazione $(f, g) : Z \to M \times N$ è C^∞.