Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 10

Esercizio 1 (tre varietà riemanniane notevoli).
Sia M una delle tre varietà $S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{D}^n$ (oppure $\mathbb{H}^n$) dotate della loro metrica riemanniana standard g.[1]

(a) Sia $\rho(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ e $\sigma(x) = e_n + \dfrac{2(x-e_n)}{\|x-e_n\|^2}$ dove $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che $\rho \circ \sigma : \mathbb{H}^n \to \mathbb{D}^n$ è un'isometria globale. Notare che l'isometria si estende ad un omeomorfismo $\overline{\mathbb{H}}^n \to \overline{\mathbb{D}}^n$, dove $\overline{\mathbb{H}}^n = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ e $\partial\mathbb{H}^n = \{x_n = 0\} \cup \{\infty\}$.

(b) Dimostrare che (M, d) è uno spazio metrico completo, dove d è la distanza indotta dalla metrica riemanniana g.

(c) Dimostrare che per ogni $p, q \in M$ e $v \in T_pM$, $w \in T_qM$ con $\|v\| = \|w\| = 1$, esiste un'isometria φ di M in sé tale che $\varphi(p) = q$ e $(D\varphi)_p(v) = w$.

(d) Dimostrare che, per ogni $p \in M$, la mappa esponenziale $\exp_p$ è suriettiva.

(e) Dimostrare che, se $\varphi : M \to M$ è un'isometria tale che $\varphi(p) = p$ e $(D\varphi)_p = Id_{T_pM}$ per qualche $p \in M$, allora $\varphi = Id_M$.

(f) Dimostrare che il gruppo di isometrie di S^n è $O(n+1, \mathbb{R})$ e che il gruppo di isometrie di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto semidiretto di $O(n, \mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^n$.

(f') Dimostrare che, se $z = x+iy$, allora le isometrie di $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ in sé sono del tipo $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc \neq 0$ (e si dicono *trasformazioni di Möbius*).
Concludere che $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\{\lambda Id \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

(g) Calcolare la curvatura gaussiana di $\mathbb{D}^2$, usando la connessione di Levi-Civita.
[Nota: è sufficiente farlo nell'origine.]

(h) Sia $Id \neq A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ e sia T_A l'isometria indotta su $\mathbb{H}^2$. Dimostrare che:

- se $|\mathrm{tr}(A)| = 2\cos(\vartheta/2) < 2$ allora T_A è *ellittica*, ossia fissa esattamente un punto in $\mathbb{H}^2$ ed è coniugata alla trasformazione di $\mathbb{D}^2$ che ruota di angolo ϑ;
- se $|\mathrm{tr}(A)| = 2$, allora T_A è *parabolica*, ossia fissa esattamente un punto sul $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ed è coniugata alla traslazione $z \mapsto z+1$;
- se $|\mathrm{tr}(A)| = 2\cosh(\ell/2) > 2$, allora T_A è *iperbolica*, ossia fissa esattamente due punti in $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ed è coniugata alla trasformazione $z \mapsto e^{\ell} z$.

(i) Dimostrare che le geodetiche di $\mathbb{D}^2$ sono diametri o archi di circonferenza ortogonali a $\partial\mathbb{D}^2$.

Esercizio 2.
Sia $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$ il toro ottenuto ruotando la curva nel piano xz di equazione $(x-a)^2 + z^2 = r^2$ attorno all'asse z, dove $0 < r < a$. Calcolare la curvatura geodetica dei paralleli di $\mathbb{T}$ (parametrizzati in lunghezza d'arco).

---

[1] Il disco iperbolico $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ è munito della metrica riemanniana

$$g_{\mathbb{D}^n} := 4\frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1-\|x\|^2)^2}\,.$$

Il semispazio iperbolico $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ è munito della metrica riemanniana

$$d_{\mathbb{H}^n} := \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x_n^2}\,.$$

Esercizio 3.
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Supponiamo che $K_p \neq 0$ e sia $p \in V \subset S$ un piccolo intorno aperto.

(a) Dimostrare che la forma d'area indotta dalla metrica riemanniana $N^*(g_{S^2})$ su V e' $|\det(B)|dA$, dove N è la mappa di Gauss, B è l'operatore forma e dA è la forma d'area naturale su S.

(b) Dimostrare che $\dfrac{\text{Area}(N(U))}{\text{Area}(U)} \to |K_p|$ quando $U \subset V$ è un piccolo intorno tale che $U \to p$.

Esercizio 4.$^{(\star)}$
Sia (M, g) una varietà riemanniana completa. Per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$, sia $\gamma_{p,v}$ l'unica geodetica tale che $\gamma_{p,v}(0) = p$ e $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$.

(a) Definiamo $\Phi_t : TM \to TM$ come $\Phi_t(p, v) = (\gamma_{p,v}(t), \dot{\gamma}_{p,v}(t))$. Dimostrare che Φ_t definisce un flusso su TM (detto *flusso geodetico*) e che tale flusso si restringe ad un flusso sul *fibrato tangente unitario* $T^1M := \{(p, v) \in TM \mid \|v\| = 1\}$.

(b) Sia $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ il toro bidimensionale con la metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che l'immagine di una geodetica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ o è chiusa oppure è densa in $\mathbb{T}$.
Cosa si può dire dell'immagine della mappa $(\gamma, \dot{\gamma}) : \mathbb{R} \to T\mathbb{T}$?

(c) Sia θ la 1-forma differenziale (1-*forma canonica*) sulla varietà T^*M definita come $\theta_{(p,\alpha)}(\dot{p}, \dot{\alpha}) = \alpha(\dot{p})$, dove $\alpha \in T_p^*M$ e $t \mapsto (p_t, \alpha_t)$ è un germe di cammino in T^*M con $(p_0, \alpha_0) = (p, \alpha)$, che rappresenta quindi un vettore tangente in $T_{(p,\alpha)}(T^*M)$. Se $\psi = (x_1, \ldots, x_n) : U \to \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$ è una carta per $U \subset M$ e

$$(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \big(\psi, (D\psi^{-1})^T\big) : T^*U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

è la carta indotta su $T^*U \subset T^*M$, esprimere θ e la 2-*forma canonica* $\omega := d\theta$ sulla varietà T^*M nelle coordinate locali (x_i, ξ_j).

(d) Dimostrare che la metrica g induce un diffeomorfismo $b : TM \to T^*M$ che commuta con la proiezione su M ed è lineare su ogni $T_pM \to T_p^*M$.

(e) Verificare che esiste un unico campo vettoriale $V \in \mathfrak{X}(TM)$ tale che

$$(b^*\omega)_{(p,v)}(V_{p,v}, -) = d\left(\frac{1}{2}\|v\|^2\right)$$

per ogni $(p, v) \in TM$. Dimostrare quindi che tale V genera il flusso Φ_t.