Corso di geometria differenziale

Anno accademico 2012/2013

Esercizi - Foglio 1

Esercizio 1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto (con $n \geq 1$) e sia $p \in U$.

(a) Dimostrare che esiste un'applicazione bilineare canonica

$$T_pU \times m_p \to \mathbb{R}$$

e che essa induce un isomorfismo tra T_p^*U (ossia il duale dello spazio vettoriale reale T_pU) e lo spazio vettoriale reale (m_p/m_p^2).

(b) Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale reale m_p^k/m_p^{k+1} per ogni $k \geq 1$.

(c) Esibire un elemento non nullo in $m_p^k \setminus m_p^{k+1}$ per ogni $k \geq 1$ e un elemento non nullo in $\bigcap_{h \geq 1} m_p^h$.

Esercizio 2. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto (con $n \geq 1$) e sia $p \in U$. Definiamo su $E(p)$ la seguente operazione binaria:

$$(U, f) + (V, g) := (U \cap V, f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V})$$

(a) Dimostrare che tale operazione non può indurre una struttura di gruppo abeliano su $E(p)$.

(b) Dimostrare che tale operazione discende ad un'operazione ben definita su $\mathcal{E}(p)$, che rende $\mathcal{E}(p)$ un gruppo abeliano.

Esercizio 3. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $p \in U$ e sia $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.
$(\star)$: Supponiamo che tutte le derivate parziali di f si annullino in p.

(a) Dimostrare che $v(f) = 0$ per ogni $v \in T_pU$.

(b) Dimostrare che, per ogni $v \in T_pU$, esiste un $X \in \mathcal{X}(U)$ a supporto compatto in U tale che $X_p = v$ (dove X_p è definito come l'unico vettore $X_p \in T_pU$ tale che $X_p(g) = X(g)(p)$ per ogni $g \in \mathcal{E}(p)$). Diciamo allora che X *estende* v, oppure che v *è il valore di* X *in* p. *[Usare una partizione dell'unità...]*

(c) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \Psi : \ T_pU \times T_pU &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto X_1(X_2(f))(p) \end{aligned}$$

è ben definita, bilineare e simmetrica, dove $X_i \in \mathcal{X}(U)$ è una qualunque estensione di v_i per $i = 1, 2$.

(d) Dimostrare che l'applicazione Ψ non è ben definita se l'ipotesi $(\star)$ non è soddisfatta da f.

Esercizio 4. Dimostrare che esiste un'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ la cui immagine contenga tutti i punti di $\mathbb{Q}^2$ (ossia tutti i punti con entrambe le coordinate razionali).

Esercizio 5. Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme compatto e non vuoto e sia $U_0 = \mathbb{R}^n$ e

$$U_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, B) < \frac{1}{k} \right\}$$

per ogni $k \geq 1$.

(a) Dimostrare che per ogni $k \geq 1$ esiste una funzione $f_k : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ di classe C^∞ tale che

$$\overline{U}_k \setminus U_{k+1} \subseteq \operatorname{supp}(f_k) \subseteq \overline{U}_{k-1} \setminus U_{k+2}$$

(b) Dimostrare che esiste una successione (a_k) con $a_k > 0$ tale che

$$f := \left(\sum_{k \geq 1} a_k f_k \right) : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

sia una ben definita funzione C^∞ che soddisfi $f^{-1}(0) = B$.

(c) Dimostrare che si può ottenere una f come al punto (b) e tale che $f \equiv 1$ su $\mathbb{R}^n \setminus U_1$. Dimostrare che una tale f si può ottenere anche nel caso in cui B sia soltanto chiuso (e non necessariamente compatto).