Esercizi di algebra lineare (14 gennaio 2019)

Esercizio 1. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$. Dimostrare che A e B sono simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso polinomio minimo.

Esercizio 2. Esibire due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ che non siano simili ma che abbiano lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso polinomio minimo.

Esercizio 3. Se $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, con λ e μ non necessariamente distinti, allora per ogni intero $n \geq 1$ vale $D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$. Utilizzare questo fatto per calcolare A^n, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Esercizio 4. I numeri di Fibonacci sono definiti dalla ricorsione

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{per ogni } n \geq 1. \end{cases}$$

Esprimere questa ricorsione nella forma

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

per un'opportuna matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
Utilizzare questo fatto per ricavare una formula chiusa per F_n.

Esercizio 5. Dimostrare che se A e B sono due matrici quadrate che commutano, allora

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Mostrare inoltre con un controesempio che questo può non essere vero se A e B non commutano.

Osservazione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f\colon V \to V$ un endomorfismo con polinomio caratteristico p_f completamente riducibile. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M := f_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è una matrice in forma di Jordan, che può quindi essere scritta come $M = D + T$, con D diagonale e T strettamente triangolare superiore. Siano $f_{\text{diag}}, f_{\text{nil}}\colon V \to V$ gli unici endomorfismi tali che $(f_{\text{diag}})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = D$ e $(f_{\text{nil}})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = T$, cosicché f_{diag} è diagonalizzabile, f_{nil} è nilpotente e $f = f_{\text{diag}} + f_{\text{nil}}$. Chiamiamo la decomposizione $f = f_{\text{diag}} + f_{\text{nil}}$ **decomposizione di Jordan**.

Esercizio 6. Sia I_k la matrice identità $k \times k$ e sia J_k un blocco nilpotente di Jordan di ordine k. Sia inoltre $\lambda \in \mathbb{K}$. Calcolare $(\lambda I_k + J_k)^n$.

Esercizio 7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare la decomposizione di Jordan $A = A_{\text{diag}} + A_{\text{nil}}$ ed utilizzarla per calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 8. Dati due endomorfismi f e g di uno spazio vettoriale V, definiamo la loro parentesi $[f, g] \in \operatorname{End}(V)$ come

$$[f, g] := f \circ g - g \circ f,$$

di modo che $[f, g] = 0$ se e solo se f e g commutano.
Dimostrare che, se V ha dimensione finita, l'equazione $[f, g] = \operatorname{Id}_V$ non ha soluzione.
(Suggerimento: utilizzare le proprietà della traccia).

Esercizio 9. Sia $V = \mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile t e siano $\varphi, \psi \colon V \to V$ i due endomorfismi dati rispettivamente da

$$\varphi(p) := \frac{dp}{dt}, \qquad \psi(p) := t \cdot p.$$

Calcolare $[\varphi, \psi] \in \operatorname{End}(V)$.