Esercizi di algebra lineare (8 gennaio 2019)

Esercizio 1. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale di dimensione finita V, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio f-invariante (ovvero tale che $f(W) \subseteq W$). Dimostrare che, se f è diagonalizzabile, allora anche $f|_W^W\colon W \to W$, è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio invariante per f. Siano

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V); \qquad E'_\lambda = \ker(f|_W^W - \lambda \cdot \mathrm{Id}_W).$$

Dimostrare che $E'_\lambda = W \cap E_\lambda$.

Definizione. Un endomorfismo $f\colon V \to V$ dello spazio vettoriale V è *semisemplice* se ogni sottospazio f-invariante $W \subseteq V$ ha un complementare f-invariante (ossia: per ogni sottospazio $W \subseteq V$ tale che $f(W) \subseteq W$ esiste un sottospazio $U \subseteq V$ tale che $f(U) \subseteq U$ e $V = W \oplus U$).

Definizione. Un campo $\mathbb{K}$ si dice *algebricamente chiuso* se ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[t]$ non costante ha una radice in $\mathbb{K}$.

Esempio. Il teorema fondamentale dell'algebra dice esattamente che il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è algebricamente chiuso.

Osservazione. Se $p \in \mathbb{K}[t]$ è un polinomio non costante e $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, allora p è completamente riducibile, ossia è prodotto di fattori di primo grado (dimostrazione per induzione sul grado di p usando Ruffini, come fatto nel caso di $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Esercizio 3. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale di dimensione finita V sul campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che, se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso, allora i due fatti seguenti sono equivalenti:

(a) f è semisemplice

(b) f è diagonalizzabile.

(*Suggerimento: utilizzare gli esercizi 1 e 2*).

Esercizio 4. Siano $f, g\colon V \to V$ due endomorfismi dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ siano

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V); \qquad E_\lambda(g) = \ker(g - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V).$$

Dimostrare che, se f e g commutano (ossia se $f \circ g = g \circ f$), allora $E_\lambda(f)$ è g-invariante e $E_\lambda(g)$ è f-invariante.

Esercizio 5. Siano $f, g\colon V \to V$ due endomorfismi dello spazio vettoriale V di dimensione n che commutino (ossia tali che $f \circ g = g \circ f$). Dimostrare che, se f e g sono entrambe diagonalizzabili, allora si possono diagonalizzare simultaneamente, ovvero esiste una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V tale che ciascun v_i sia autovettore per f e per g.
(*Suggerimento: utilizzare l'esercizio 4*).

Esercizio 6. Siano A e B le due matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che le due matrici $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ siano entrambe diagonali.

Esercizio 7. Siano $f, g\colon V \to V$ due endomorfismi dello spazio vettoriale di dimensione finita V, che commutino (ossia tale che $f \circ g = g \circ f$). Dimostrare che, se f e g sono entrambe triangolabili, allora si possono triangolare simultaneamente, ovvero esiste una bandiera completa di sottospazi di V che è invariante sia per f che per g.

Esercizio 8. Siano A e B le due matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 12 \\ -4 & -10 & -10 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che le due matrici $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ siano entrambe matrici triangolari superiori.

Esercizio 9. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più d e sia $D\colon V \to V$ l'applicazione lineare $D(p) := dp/dx$. Dimostrare che D^2 e $D^2 - D$ sono nilpotenti e calcolare i loro diagrammi di Young associati.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo lineare nilpotente. Dimostrare che $f^2\colon V \to V$ è anch'esso nilpotente.
Se $\underline{\alpha} = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots)$ è la partizione di n associata all'endomorfismo f, come è fatta la partizione associata all'endomorfismo f^2?

Esercizio 11. Siano $f, g\colon V \to V$ due endomorfismi nilpotenti dello spazio vettoriale V. Dimostrare che se f e g commutano allora anche $f + g$ è nilpotente. Mostrare con un controesempio che se f e g non commutano, allora $f + g$ non è necessariamente nilpotente.

Esercizio 12. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo nilpotente dello spazio vettoriale V di dimensione n. Dimostrare che $\mathrm{Id}_V - f$ è invertibile con inversa

$$(\mathrm{Id}_V - f)^{-1} = \mathrm{Id} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}.$$

Esercizio 13. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione rappresentata, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di f e una base di Jordan per f.

Esercizio 14. Sia $f\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ l'applicazione rappresentata, rispetto alla base canonica di $\mathbb{Q}^3$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di f e una base di Jordan per f.

Esercizio 15. Stabilire se le seguenti matrici a coefficienti reali siano simili:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 16. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A.

Esercizio 17. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi. Dimostrare che A e A^T sono simili. (*Suggerimento: utilizzare l'esercizio 15*).

Esercizio 18. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali. Dimostrare che A e A^T sono simili.