Esercizi di algebra lineare (4 dicembre 2018)

Esercizio 1. Sia X un insieme, $\sim$ una relazione di equivalenza su X e sia $p : X \to X/\!\sim$ la proiezione canonica. Sia inoltre $f : X \to Y$ una applicazione di insiemi.
Dimostrare che i due fatti seguenti sono equivalenti:

(1) esiste una applicazione $\bar{f} : (X/\!\sim) \longrightarrow Y$ tale che $f = \bar{f} \circ p$;

(2) l'applicazione f è costante su ogni classe di equivalenza (ossia: ogni volta che due elementi $x_1, x_2 \in X$ sono equivalenti si ha $f(x_1) = f(x_2)$).

Dimostrare inoltre che, se tale $\bar{f}$ esiste, allora essa è unica.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ dotato delle coordinate (x, y, z) rispetto alla base canonica, e sia $U \subset V$ il sottospazio definito dal sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

Determinare una base dello spazio quoziente V/U.

Esercizio 3. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinare gli autovalori di φ e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Dire se φ sia diagonalizzabile.
- Determinare gli autospazi di φ.
- Dire se esista una bandiera completa[1] di sottospazi invarianti per φ. Se sì, determinarla.
- Dire se esista una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice triangolare superiore. Se sì, esibire una tale P e calcolare $P^{-1}AP$.

Esercizio 4. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare gli autovalori di φ e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Dire se φ sia diagonalizzabile.
- Determinare gli autospazi di φ.
- Dire se esista una bandiera completa di sottospazi invarianti per φ. Se sì, determinarla.
- Dire se esista una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice triangolare superiore. Se sì, esibire una tale P e calcolare $P^{-1}AP$.

Esercizio 5. Sia $\varphi\colon V \to V$ un endomorfismo, e siano U_0 e U_1 sottospazi φ-invarianti (detti anche "φ-stabili"). Dimostrare che $U_0 \cap U_1$ e $U_0 + U_1$ sono φ-invarianti.

[1] Vedi definizioni alla pagina seguente.

Esercizio 6. Sia $\varphi\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Il *conucleo* di φ è definito come lo spazio vettoriale

$$\operatorname{coker}(\varphi) = W/\operatorname{Im}(\varphi).$$

Dimostrare che φ è suriettiva se e solo se $\operatorname{coker}(\varphi)$ ha dimensione 0.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\varphi, \psi\colon V \to V$ du endomorfismi. Sia infine $U \subseteq V$ un sottospazio che sia invariante sia rispetto a φ che rispetto a ψ.
Supponiamo si abbia $\varphi|_U^U = 0$ e $\bar{\psi} = 0$, dove $\varphi|_U^U\colon U \to U$ è la restrizione di φ a U e $\bar{\psi}\colon V/U \to V/U$ è l'applicazione tra i quozienti indotta da ψ.
Dimostrare che $\varphi \circ \psi = 0$.

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale. Una *bandiera* in V è un catena di sottospazi $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{k-1} \subsetneq V_k = V$. Una bandiera si dice *completa* se $\dim(V_i) = i$ e quindi $k = \dim(V)$.

Proposizione 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $f : V \to V$ un endomorfismo lineare. Allora f è triangolabile $\iff$ esiste una bandiera completa $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$ di sottospazi f-invarianti di V.

Proof. $\boxed{\Longrightarrow}$
Poiché f è triangolabile, esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tale che la matrice $f_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia triangolare superiore. Dunque il sottospazio $V_k = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ è f-invariante per ogni $k = 0, \ldots, n$ e quindi $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$ è una bandiera completa.

$\boxed{\Longleftarrow}$
Sia $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$ una bandiera completa di sottospazi f-invarianti, e sia $v_k \in V_k \setminus V_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n$.

Asserzione. *La collezione $(v_1, \ldots, v_k)$ è una base di V_k per ogni $k = 1, \ldots, n$.*

Dall'asserzione segue che $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base di $V_n = V$ tale che $f_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia triangolare superiore.
Dimostriamo quindi l'asserzione per induzione su $k \geq 1$.
Il caso $k = 1$ è facile, in quanto V_1 ha dimensione 1 e $v_1 \in V_1$ ma $v_1 \notin V_0 = \{0\}$, e dunque $\{v_1\}$ è una base di V_1.
Supponiamo ora $k \geq 2$ e vera l'asserzione per V_{k-1}. Allora $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ sono una base di V_{k-1} e dunque sono linearmente indipendenti. Inoltre, $v_k \in V_k \setminus V_{k-1}$, dunque $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sono linearmente indipendenti. Notiamo che $v_1, \ldots, v_{k-1} \in V_{k-1} \subset V_k$ e $v_k \in V_k$. Dunque $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k) \subseteq V_k$ e ha dimensione k. Ne segue che $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sono generano V_k e dunque sono una sua base. $\square$