Esercizi di algebra lineare (20 novembre 2018)

Esercizio 1. (a) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Dimostrare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(b) Esibire una matrice $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q})$ tale che $B^2 = 2 \cdot \mathrm{Id}$.

(c) Dimostrare che non esiste alcuna matrice $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q})$ tale che $C^2 = 2 \cdot \mathrm{Id}$.

Esercizio 2. Calcolare il seguente determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ b & 0 & 1 & a \\ c & e & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per ogni $a, b, c, e \in \mathbb{K}$.

Esercizio 3. I numeri 2418, 1395, 8091, 8339 sono divisibili per 31. Dimostrare senza effettuare il conto esplicito che il determinante

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 8 & 0 & 9 & 1 \\ 8 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

è divisibile per 31. *(Suggerimento: come cambia il determinante di una matrice se al posto di colonna si scrive quella colonna più una combinazione lineare delle altre?)*

Esercizio 4. Calcolare il seguente determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

come elemento di $\mathbb{K}[x]$, per ogni $a_0, a_1, \dots, a_n$ in $\mathbb{K}$.

Esercizio 5. Determinare il grado e tutte le radici complesse del seguente polinomio

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{pmatrix}.$$

Richiamo. Una **permutazione** dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ è una biiezione di $\{1, 2, \dots, n\}$ in sè. Indichiamo con S_n l'insieme di tali permutazioni. Gli elementi di S_n possono essere composti e invertiti, e la composizione di due permutazioni è ancora una permutazione, così come l'inversa di una permutazione è ancora una permutazione. Inoltre la composizione è associativa ed esiste un elemento neutro: l'identità di $\{1, 2, \dots, n\}$ in sé. Una **trasposizione** è una permutazione che scambia due elementi e tiene fissi tutti gli altri.

Esercizio 6. Indichiamo con S_n l'insieme di tutte le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Considerare la permutazione $\sigma \in S_n$ tale che $\sigma(i) = i + 1$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$ e $\sigma(n) = 1$. Esprimere σ come una composizione di trasposizioni (ovvero di scambi di due soli elementi) e calcolare il segno di σ (ovvero la parità del numero di questi scambi).

Esercizio 7. Si consideri la traspozione $\tau_{12} \in S_n$ che scambia 1 con 2 e fissa gli altri elementi $\{3, 4, \dots, n\}$. Determinare il sottoinsieme $C_{12} = \{\sigma \in S_n \,|\, \tau_{12} \circ \sigma = \sigma \circ \tau_{12}\}$ di S_n e dire quanti elementi C_{12} contenga.