Algebra lineare

ANNO ACCADEMICO 2018/19

Prova scritta - 24 giugno 2019

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Canale: *A-L* *(Fiorenza-De Concini)* *M-Z* *(Mondello)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. (i) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino $z^2 - z = |z|$.

(ii) Siano $p_1 = t^4 - 7t^3 - 2t^2 + 12t + 14$ e $p_2 = t^3 - 6t^2 - 8t + 7$ polinomi reali in t. Dire se p_1, p_2 abbiano una radice reale in comune.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale reale delle successioni $(x_n)_{n\geq 1}$ di numeri reali. Si considerino i seguenti sottoinsiemi W_1, W_2 di $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \text{la successione } (x_n) \text{ ha minimo assoluto o massimo assoluto per } n = 1\} = \\ &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid (x_1 \leq x_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}) \quad \text{oppure} \quad (x_1 \geq x_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N})\} \\ W_2 &= \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \text{la successione } (x_n) \text{ è limitata}\} = \{(x_n) \in \mathcal{S} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ tale che } |x_n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

(i) Per ciascun $i = 1, 2$, determinare se W_i sia un sottospazio vettoriale di $\mathcal{S}$.

(ii) Per ciascun W_i che sia un sottospazio di $\mathcal{S}$, dire se W_i abbia dimensione finita.

Risoluzione:

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 reali e l'applicazione lineare $F : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ definita come $F(X) := Z \cdot X$, dove $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare il polinomio minimo dell'applicazione F e dire se F sia diagonalizzabile.

(ii) Calcolare gli autovalori di F e determinare basi per gli autospazi di F.

(iii) Determinare il polinomio caratteristico di F.

Risoluzione:

Esercizio 4. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori (e le loro molteplicità algebriche) di A e di B.

(ii) Determinare le dimensioni degli autospazi e degli autospazi generalizzati di A e di B.

(iii) Determinare la forma di Jordan e il polinomio minimo di A e di B, e dire se le matrici A e B siano simili.

Risoluzione: