Tre esercizi svolti di algebra lineare (6/1/2020)

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ sia $U \subset \mathbb{R}^3$ is sottospazio vettoriale generato dai due vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinare equazioni cartesiane per U.

Risposta. $U = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -5z + y + z = 0 \right\}.$

Dimostrazione.
Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *associata alla matrice*

$$A := \left(\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{array} \right).$$

L'immagine di L_A *è lo span delle colonne di* A*, e quindi* $\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{span}(v_1, v_2) = U$*. Dunque abbiamo riformulato il problema: dobbiamo cercare equazioni cartesiane per l'immagine di* L_A*.*

Un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *appartiene al sottospazio* $U = \mathrm{Im}(L_A)$ *se e solo se il sistema* $AX = v$ *ammette soluzione. Possiamo dunque applicare Rouché-Capelli, considerando la matrice completata* $\hat{A} = (A|v)$ *e riducendone la parte sinistra a scala con l'algoritmo di eliminazione di Gauss:*

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 0 & 1 & z-3x \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & 1 & z-3x \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \\ 0 & 1 & -3x+z \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & 2x-y \\ 0 & 0 & -5x+y+z \end{array} \right) = \hat{A}'$$

Ora la matrice $\hat{A}' = (A'|v')$ *è ottenuta da* $\hat{A}$ *con operazioni elementari sulle righe e la parte sinistra* A' *è ridotta a scala. Le due colonne di* A' *contengono ciascuna un pivot. L'ultima colonna a destra di* $\hat{A}'$ *contiene un pivot se e solo se* $-5x + y + z \neq 0$*. Dunque il sistema* $AX = v$ *ammette soluzione se e solo se* $-5x + y + z = 0$*. Concludiamo che* $U = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid -5z + y + z = 0 \right\}.$

Esercizio 2. Sia $L_A \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{Q}^2$ e di $\mathbb{Q}^3$). Determinare equazioni cartesiane per l'immagine di L_A.

Risposta. $\mathrm{Im}(L_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; x - y = 2x - z = 0 \right\}$.

Dimostrazione.
Procediamo come nell'esercizio precedente. Vogliamo determinare i vettori $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$ *che appartengano all'immagine di* L_A*, ossia i vettori* v *per cui il sistema* $AX = v$ *abbia soluzione. Consideriamo la matrice completata* $\hat{A} = (A|v)$ *e applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss per riduarla a scala*

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ -2 & -1 & y \\ 4 & 2 & z \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & 0 & x+y \\ 4 & 2 & z \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 1 & x \\ 0 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & z-2x \end{array} \right) = \hat{A}'$$

Ora $\hat{A}' = (A'|v')$ *è ottenuta da* $\hat{A}$ *con operazioni elementari sulle righe e* A' *è una matrice a scala. La matrice* A' *ha un pivot nella prima colonna e nessun pivot nella seconda (infatti la seconda colonna è multipla della prima). Inoltre* $\hat{A}'$ *avrà un pivot nell'ultima colonna a destra, a meno che non si verifichi che* $x + y = z - 2x = 0$*. Dunque il sistema* $AX = v$ *ha soluzione se e solo se* $x + y = z - 2x = 0$*.*
Concludiamo che il sistema seguente

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

dà le equazioni cartesiane cercate per l'immagine di L_A*.*

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ siano U e W i sottospazi definiti da

$$U = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}, \quad \text{dove} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \operatorname{span}\{w_1, w_2\}, \quad \text{dove} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base del sottospazio $U \cap W$.

Risposta. Una base di $U \cap W$ è $\mathcal{B} = (u_2)$.

Dimostrazione.
Notiamo che $u_1, u_2 \neq 0$ *e* u_1, u_2 *non sono multipli l'uno dell'altro: dunque sono linearmente indipendenti e quindi* (u_1, u_2) *è una base di* U *(poiché* u_1, u_2 *generano* U *per definizione). Analoghe considerazioni valgono per* (w_1, w_2)*, che quindi è una base di* W*. Dunque* $\dim(U) = \dim(W) = 2$.
Consideriamo la matrice

$$A := (u_1 \; u_2 \,|\, w_1 \; w_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss ad A *per ridurla a scala, e otteniamo*

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) =: B\,,$$

da cui notiamo che le prime tre colonne di B *sono linearmente indipendenti e la quarta colonna soddisfa* $B^4 = B^2 + B^3$*. Ne segue che le prime tre colonne di* A *sono linearmente indipendenti e la quarta colonna di* A *soddisfa* $A^4 = A^2 + A^3$*. Dunque,* $\dim(U + W) = 3$ *e* $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1$*. Inoltre,* $w_2 = A^4 = A^2 + A^3 = u_2 + w_1$*, e quindi il vettore* $u_2 = -w_1 + w_2$ *appartiene sia ad* U *che a* W *(in quanto* $u_2 \in U$ *e* $-w_1 + w_2 \in W$*). Poiché* $\dim(U \cap W) = 1$ *e* $0 \neq u_2 \in U \cap W$*, ne segue che* (u_2) *è una base di* $U \cap W$.