Tutoraggio del 12 dicembre 2019

Esercizio 1. Dire se V sia somma diretta dei sottospazi vettoriali U_1, U_2:

- $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad U_1 = \{\text{matrici triangolari superiori}\}, U_2 = \{A \mid A = A^T\}$;
- $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad U_1 = \{\text{matrici triangolari superiori}\}, U_2 = \{A \mid A = -A^T\}$;
- $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad U_1 = \{A \mid A = A^T\}, U_2 = \{A \mid A(e_1 + e_2) = A(e_2 + e_3) = 0\}$;
- $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad U_1 = \{A \mid \text{Traccia}(A) = 0\}, U_2 = \text{Span}(\text{Id})$.

Esercizio 2. Determinare una base del sottospazio vettoriale $U \subset V$ e completarla ad una base di V:

- $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad U = \{\text{matrici triangolari superiori}\}$;
- $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad U = \{\text{matrici diagonali}\}$;
- $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad U = \{A \mid Ae_1 \in \text{Span}(e_1)\}$.

Esercizio 3. Calcolare una base del nucleo e dell'immagine delle applicazioni lineari $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associate alle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 8 & -27 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Calcolare, al variare dei parametri reali a, b, c, il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Determinare una matrice A tale che l'applicazione lineare associata $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

(i) abbia rango 2

(ii) ammetta 3 come autovalore e il corrispondente autospazio abbia equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.