Altri esercizi di algebra lineare (9 gennaio 2020)

Esercizio 1. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio invariante per f. Chiamiamo $h : W \to W$ la restrizione di f a W e siano

$$V_\lambda = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V); \qquad W_\lambda = \ker(h - \lambda \cdot \mathrm{Id}_W)$$

gli autospazi di f e h associati a λ. Dimostrare che $W_\lambda = W \cap V_\lambda$.

Esercizio 2. Siano$A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ matrici quadrate. sia

$$e^A := \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

(o) Dimostrare che, se $AB = BA$, allora $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Mostrare inoltre con un controesempio che questo può non essere vero se A e B non commutano.

(i) Dimostrare che la serie $e^A := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ è sempre assolutamente convergente (ossia $(e^A)_{ij} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} (A^k)_{ij}$ è assolutamente convergente).

(ii) Dimostrare che $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}$ per ogni $t, s \in \mathbb{C}$.

(iii) Se $AB = BA$, dimostrare che $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.

(iv) Fornire un esempio in cui $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

Esercizio 3. Dati due endomorfismi f e g di uno spazio vettoriale V, definiamo la loro parentesi $[f, g] \in \mathrm{End}(V)$ come $[f, g] := f \circ g - g \circ f$, cosicché $[f, g] = 0$ se e solo se f e g commutano.

(i) Dimostrare che, se V ha dimensione finita, non esiste alcun coppia f, g di endomorfismi di V tale che $[f, g] = \mathrm{Id}_V$. *(Suggerimento: utilizzare le proprietà della traccia).*

(ii) Sia $V = \mathbb{C}[t]$ e siano $D, \mu\colon V \to V$ endomorfismi definiti come $D(p) := dp/dt$ e $\mu(p) := t \cdot p$. Calcolare $[D, \mu] \in \mathrm{End}(V)$.

Esercizio 4. Siano $f, g\colon V \to V$ due endomorfismi nilpotenti dello spazio vettoriale V. Dimostrare che se f e g commutano allora anche $f + g$ è nilpotente. Mostrare con un controesempio che se f e g non commutano, allora $f + g$ non è necessariamente nilpotente.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 31}$ e sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$f(p) := \frac{d^2p}{dt^2} + 5\frac{dp}{dt}.$$

Calcolare il polinomio caratteristico di f, determinare autovalori e basi degli autospazi di f. Dire se f sia triangolabile. Calcolare il polinomio minimo di f. Dire se f sia diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ (dove $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$). Sia $h_i \in \mathbb{K}[t]$ il polinomio $h_i := \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j - t}{\lambda_j - \lambda_i}$ e sia $\pi_i : V \to V$ definita come $\pi_i := h_i(f)$.

(i) Dimostrare che $\mathrm{Im}(\pi_i) \subseteq V_{\lambda_i}$ e che $\pi_i^2 = \pi_i$.

(ii) Dimostrare che $\sum_i h_i = 1$ e quindi $\sum_i \pi_i = \mathrm{Id}_V$.

(iii) Dimostrare che $\mathrm{Im}(\pi_i) = V_{\lambda_i}$ e che $\ker(\pi_i) = \bigoplus_{j \neq i} V_{\lambda_j}$.

(iv) Dimostrare che ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = v_1 + \cdots + v_k$ con $v_i \in V_{\lambda_i}$, e che $v_i = \pi_i(v)$.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita, sia $k \geq 1$ un intero e sia $f : V \to V$ un endomorfismo tale che $f^k = \mathrm{Id}_V$.

(a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dimostrare che f è diagonalizzabile.

(b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dire per quali k l'endomorfismo f è sicuramente diagonalizzabile. Per gli altri k, esibire un controesempio.

Esercizio 8. Sia $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$ e sia

$$\mathfrak{S}_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma \text{ biiettiva}\}$$

il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sia $M^\sigma \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice la cui i-esima colonna sia $(M^\sigma)^i = e_{\sigma(i)}$.

(a) Dimostrare che $M^{\mathrm{id}} = I$ e che $M^\tau M^\sigma = M^{\tau \circ \sigma}$ per ogni $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(b) Dimostrare che $M^{(\sigma^{-1})} = (M^\sigma)^{-1}$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(c) Per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ dimostrare che esiste un intero positivo $N > 0$ tale che $\sigma^N = \mathrm{id}$.

(d) Assumendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dire per quali σ la matrice M^σ è diagonalizzabile.

(e) Assumendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dire per quali σ la matrice M^σ è diagonalizzabile.

Esercizio 9. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Diciamo che A, B sono *simili come matrici complesse* se esiste $R \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $B = RAR^{-1}$; diciamo che sono *simili come matrici reali* se esiste $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile tale che $B = PAP^{-1}$.

(i) Dimostrare che, se A, B sono simili come matrici reali, allora sono simili come matrici complesse.

(ii) Sia $R = P + iQ$ dove $P, Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che, se $RA = BR$, allora $PA = BP$ e $QA = BQ$. Dimostrare quindi che, posto $R_z := P + zQ$, si ha $R_z A = BR_z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Dimostrare che, se A, B sono simili come matrici complesse, allora sono simili come matrici reali.