Altri esercizi di algebra lineare (9 gennaio 2020)

Esercizio 1. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio invariante per f. Chiamiamo $h : W \to W$ la restrizione di f a W e siano

$$V_\lambda = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V); \qquad W_\lambda = \ker(h - \lambda \cdot \mathrm{Id}_W)$$

gli autospazi di f e h associati a λ. Dimostrare che $W_\lambda = W \cap V_\lambda$.

Esercizio 2. (a) Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e sia $V = \mathbb{C}$. Consideriamo l'applicazione $f : V \to V$ definita come $f(v) = \lambda v$. Vedendo V come spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con base $\mathcal{B} = (1, i)$, determinare la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$.

(b) Sia $V = \mathbb{C}^n$ con base standard $(e_1, \ldots, e_n)$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Consideriamo l'applicazione $f : V \to V$ definita da $f(e_k) = \lambda_k e_k$. Vedendo V come spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con base $\mathcal{B} = (e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_n, ie_n)$, determinare la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$. Determinare la matrice che rappresenta f nel caso in cui $\lambda_k = e^{i\theta_k}$ per opportuni $\theta_k \in [0, 2\pi)$.

Esercizio 3. Determinare una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizzi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

e calcolare A^k per ogni intero $k \geq 1$.

Esercizio 4. I numeri di Fibonacci sono definiti dalla ricorsione

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{per ogni } n \geq 1. \end{cases}$$

Esprimere questa ricorsione nella forma

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

per un'opportuna matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Utilizzare questo fatto per ricavare una formula chiusa per F_n.

Esercizio 5. Siano$A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ matrici quadrate. sia

$$e^A := \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

(o) Dimostrare che, se $AB = BA$, allora $(A + B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Mostrare inoltre con un controesempio che questo può non essere vero se A e B non commutano.

(i) Dimostrare che la serie $e^A := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ è sempre assolutamente convergente (ossia $(e^A)_{ij} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (A^k)_{ij}$ è assolutamente convergente).

(ii) Dimostrare che $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}$ per ogni $t, s \in \mathbb{C}$.

(iii) Se $AB = BA$, dimostrare che $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.

(iv) Fornire un esempio in cui $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

Esercizio 6. Dati due endomorfismi f e g di uno spazio vettoriale V, definiamo la loro parentesi $[f, g] \in \mathrm{End}(V)$ come $[f, g] := f \circ g - g \circ f$, cosicché $[f, g] = 0$ se e solo se f e g commutano.

(i) Dimostrare che, se V ha dimensione finita, l'equazione $[f, g] = \mathrm{Id}_V$ non ha soluzione. *(Suggerimento: utilizzare le proprietà della traccia).*

(ii) Sia $V = \mathbb{C}[t]$ e siano $\varphi, \psi \colon V \to V$ endomorfismi definiti come $\varphi(p) := dp/dt$ e $\psi(p) := t \cdot p$. Calcolare $[\varphi, \psi] \in \mathrm{End}(V)$.

Esercizio 7. Stabilire se le seguenti matrici a coefficienti reali siano simili:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Siano A e B le due matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ siano entrambe diagonali.

Esercizio 9. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq d}$ e sia $D \colon V \to V$ l'applicazione lineare $D(p) := dp/dt$.
Dimostrare che D^2 e $D^2 - D$ sono nilpotenti e calcolare i loro diagrammi di Young associati.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo lineare nilpotente. Dimostrare che $f^2 \colon V \to V$ è anch'esso nilpotente.
Se $\underline{\alpha} = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots)$ è la partizione di n associata all'endomorfismo f (dove $\alpha_i = \mathrm{rg}(f^{i-1}) - \mathrm{rg}(f^i)$ per ogni $i \geq 1$), come è fatta la partizione associata all'endomorfismo f^2?

Esercizio 11. Siano $f, g \colon V \to V$ due endomorfismi nilpotenti dello spazio vettoriale V. Dimostrare che se f e g commutano allora anche $f + g$ è nilpotente. Mostrare con un controesempio che se f e g non commutano, allora $f + g$ non è necessariamente nilpotente.

Esercizio 12. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in t di grado al più 3. Definiamo una applicazione lineare $f : V \to V$ come

$$f(p) := \frac{d^2p}{dt^2} + 5\frac{dp}{dt}.$$

Calcolare il polinomio caratteristico di f, determinare autovalori e basi degli autospazi di f.
Dire se f sia diagonalizzabile.

Esercizio 13. Sia $L_B \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ l'applicazione associata alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se L_B ammetta una forma di Jordan. Se sì, determinarla e trovare una base di Jordan.