Esercizi di algebra lineare (3 gennaio 2020)

Esercizio 1. Siano $f, g\colon V \to V$ due endomorfismi dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ siano

$$V_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V); \qquad V_\lambda(g) = \ker(g - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V).$$

Dimostrare che, se f e g commutano (ossia se $f \circ g = g \circ f$), allora $V_\lambda(f)$ è g-invariante e $V_\lambda(g)$ è f-invariante.

Esercizio 2. Siano $f, g\colon V \to V$ due endomorfismi dello spazio vettoriale V di dimensione n che commutino (ossia tali che $f \circ g = g \circ f$). Dimostrare che, se f e g sono entrambe diagonalizzabili, allora si possono diagonalizzare simultaneamente, ovvero esiste una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V tale che ciascun v_i sia autovettore per f e per g.
(*Suggerimento: utilizzare l'esercizio 2*).

Esercizio 3. Siano A e B le due matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che le due matrici $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ siano entrambe diagonali.

Esercizio 4. Sia $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare la forma canonica di Jordan di L_A e una base di Jordan per L_A.

Esercizio 5. Stabilire se le seguenti matrici a coefficienti reali siano simili:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$