Esercizi di algebra lineare (16 dicembre 2019)

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Dimostrare che il polinomio caratteristico di f coincide con quello della sua duale $f^\vee : V^\vee \to V^\vee$, e che il polinomio minimo di f coincide con quello di $f^\vee$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{C}$ e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^k = 5f$ per un certo intero $k \geq 2$. Dimostrare che f è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{C}$, sia $f : V \to V$ una applicazione lineare invertibile. Dimostrare che f è diagonalizzabile se e solo se f^2 è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f : V \to V$ una applicazione lineare. Supponiamo che il sottospazio $W \subseteq V$ sia f-invariante e denotiamo con $g : W \to W$ la restrizione di f a W.

(a) Dimostrare che, se f è triangolabile, allora g è triangolabile.

(b) Dimostrare che, se f è diagonalizzabile, allora g è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico p_A e dire se L_A sia triangolabile.

(ii) Determinare gli autovalori di L_A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Dire se L_A sia diagonalizzabile.

(iii) Determinare il polinomio minimo q_A.

(iv) Se L_A è diagonalizzabile, determinare una base che la diagonalizza.
Se L_A è triangolabile, determinare una base che la triangola.