Esercizi di algebra lineare (30 novembre 2019) - Soluzione dell'es.5

Esercizio 1. Considerare l'applicazione $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata a

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

Considerare la fibra di $A_s = L_B^{-1}(w_s)$ sopra il punto $w_s = e_1 + se_2$ al variare di $s \in \mathbb{R}$.
Per quegli s per cui A_s è non vuoto, determinare la giacitura $\overrightarrow{A}_s$ di A_s e un punto $p_s \in A_s$.

Soluzione.

$A_s \neq \emptyset \iff s = 1$. *Inoltre,* $p_1 = \begin{pmatrix} 13/27 \\ 14/27 \\ 0 \end{pmatrix} \in A_1$ *e* $\overrightarrow{A}_1 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Infatti, per definizione $A_s = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid BX = w_s\}$. *Il sistema* $BX = w_s$ *si può riscrivere come*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'esistenza di soluzioni si può verificare con Rouché-Capelli, considerando la matrice completata

$$\widehat{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & s \\ 14 & -13 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

e facendo la riduzione di Gauss, fino ad ottenere una matrice

$$\widehat{B}' == \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -27 & -18 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \end{array}\right).$$

Da cui concludiamo che una soluzione X *esiste se e solo se* $s = 1$. *Quindi* $A_s \neq \emptyset$ *se e solo se* $s = 1$.

Per $s = 1$, *gli* $X \in A_1$ *sono quelli che soddisfino il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -27x_2 + 18x_3 = -14 \end{cases}$$

e dunque una soluzione si ottiene prendendo $x_3 = 0$, $x_2 = 14/27$ *e* $x_1 = 1 - 14/27 = 13/27$, *ossia* $p_1 = \begin{pmatrix} 13/27 \\ 14/27 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Infine, la giacitura $\overrightarrow{A}_1 = \ker(L_B)$, *ossia è data dagli* X *che soddisfino* $BX = 0$. *Facendo la riduzione di Gauss, la condizione è equivalente a*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo $X = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$. *Ne segue che* $\overrightarrow{A}_1 = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 + e_3)$.