Algebra lineare - Soluzione dell'esercizio 2 (20 ottobre 2019)

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi reali in t di grado al più n. Considerare l'applicazione $f : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ definita come $f(p) := p(t+1) - p(t-1) - p(1)$.

(i) Dimostrare che f è lineare.

Soluzione.

Osserviamo intanto che f è ben definita, ossia che $f(p) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ per ogni $p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$. Infatti, se $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, allora

$$\begin{aligned}
f(p) &= p(t+1) - p(t-1) - p(1) = \\
&= (a_0 + a_1(t+1) + a_2(t+1)^2 + a_3(t+1)^3) - (a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3) \\
&\qquad\qquad - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) = \\
&= (a_2 + 3a_3 - a_2 + 3a_3)t^2 + (a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_1 + 2a_2 - 3a_3)t - (a_0 - a_1 + a_2 - a_3) = \\
&= 6a_3 t^2 + 4a_2 t - (a_0 - a_1 + a_2 - a_3).
\end{aligned}$$

Ora verifichiamo la linearità di f. Siano $p, q \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$. Esistono $a_0, \ldots, a_3, b_0, \ldots, b_3 \in \mathbb{R}$ tali che $p = \sum_{i=0}^{3} a_i t^i$ e $q = \sum_{j=0}^{3} b_j t^j$. Inoltre $p + q = \sum_{k=0}^{3} (a_k + b_k) t^k$. Calcoliamo

$$p(t+1) = \sum_{i=0}^{3} a_i (t+1)^i, \quad q(t+1) = \sum_{j=0}^{3} b_j (t+1)^j$$

e inoltre

$$(p+q)(t+1) = \sum_{k=0}^{3} (a_k + b_k)(t+1)^k$$

da cui segue immediatamente che $(p+q)(t+1) = p(t+1) + q(t+1)$. In modo simile, $(p+q)(t-1) = p(t-1) + q(t-1)$ e $(p+q)(1) = p(1) + q(1)$. Quindi

$$\begin{aligned}
f(p+q) &= (p+q)(t+1) - (p+q)(t-1) - (p+q)(1) = \\
&= p(t+1) + q(t+1) - p(t-1) - q(t-1) - p(1) - q(1) = \\
&= (p(t+1) - p(t-1) - p(1)) + (q(t+1) - q(t-1) - q(1)) = \\
&= f(p) - f(q).
\end{aligned}$$

Sia ora $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$(\lambda p)(t+1) = \sum_{i=0}^{3} (\lambda a_i)(t+1)^i = \lambda \sum_{i=0}^{3} a_i (t+1)^i = \lambda \cdot p(t+1)$$

e in modo simile $(\lambda p)(t-1) = \lambda \cdot p(t-1)$ e $(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1)$. Segue che

$$\begin{aligned}
f(\lambda p) &= (\lambda p)(t+1) - (\lambda p)(t-1) - (\lambda p)(1) = \\
&= \lambda(p(t+1) - p(t-1) - p(1)) = \\
&= \lambda \cdot f(p).
\end{aligned}$$

(ii) Dire se f sia iniettiva. Dire se f sia suriettiva.

Soluzione.

f è suriettiva ma non iniettiva.

Infatti, dalla formula esplicita trovata prima abbiamo

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = 6a_3 t^2 + 4a_2 t - (a_0 - a_1 + a_2 - a_3)$$

Ne segue che il nucleo di f *consiste dei polinomi* $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ *che soddisfino*

$$\begin{cases} 6a_3 = 0 \\ 4a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

ossia $\ker(f) = \{a(t+1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(t+1)$. *Quindi il nucleo di* f *ha dimensione* 1, *e quindi* f *non è iniettiva.*

Verifichiamo ora che f *è suriettiva. Dato* $r = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, *cerchiamo* $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ *tale che* $f(p) = r$. *Cerchiamo quindi* $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} 6a_3 = c_2 \\ 4a_2 = c_1 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = c_0 \end{cases}$$

Per ogni $s \in \mathbb{R}$, *il vettore* $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s + c_1/4 - c_2/6 - c_0 \\ c_1/4 \\ c_2/6 \end{pmatrix}$ *è una soluzione di tale sistema.*

Quindi f *è suriettiva.*

(iii) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f.

Soluzione.

Una base del nucleo è già stata determinata al punto (ii) ed è $(t+1)$.

Essendo f *suriettiva, una base dell'immagine è una base di* $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, *quindi possiamo per esempio prendere* $(1, t, t^2)$.