Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Soluzioni dello pseudo-esame

Esercizio 1. *Considerare* $S^1, D^2 \subset \mathbb{C}$. *Sia* $k \in \mathbb{Z}$ *dato. Sia* X *lo spazio topologico* $X = S^1 \sqcup D^2/\sim$, *dove* $\sim$ *identifica un punto* $z \in \partial D^2$ *con* $z^k \in S^1$.
Determinare gli spazi topologici (a meno di omeomorfismo) rivestiti da X.

Soluzione dell'esercizio 1. Notiamo che X è un complesso di celle finito e dunque è compatto. Dunque, se $p : X \to Y$ è un rivestimento, allora necessariamente p è un rivestimento finito. Supponiamo $d \geq 1$ sia il grado di p. Ne segue che $\chi(X) = d \cdot \chi(Y)$. Tuttavia X ha una 0-cella, una 1-cella e una 2-cella, e quindi $\chi(X) = 1$. Ne segue che $d = \pm 1$ e dunque p è un rivestimento biunivoco e perciò un omeomorfismo. Concludiamo che l'unico spazio (a meno di omeomorfismo) rivestito da X è X stesso.

Esercizio 2.
Sia M *una varietà compatta orientata e connessa di dimensione* m *e sia* $Z \subset M$ *una sottovarietà chiusa, orientata e connessa di codimensione* 1. *Denotiamo con* $[Z]$ *la classe* $i_*\mu_Z \in H_{m-1}(M;\mathbb{Z})$, *dove* $i : Z \hookrightarrow M$ *è l'inclusione e* μ_Z *è la classe fondamentale di* Z.

(a) *Dimostrare che* $M \setminus Z$ *è connesso* $\iff$ $[Z] \neq 0$.

(b) *Dimostrare che, se* $[Z] \neq 0$, *allora* $[Z]$ *non è divisibile*
(ossia non esistono $\nu \in H_{m-1}(M;\mathbb{Z})$ *e* $d \in \mathbb{Z}$ *tali che* $d \cdot \nu = [Z]$*).*

(c) *Mostrare che esiste una* M *come sopra e una* $W \subset M$ *chiusa, connessa, orientata di codimensione* 2 *tale che* $[W] \neq 0$ *e* $[W]$ *sia divisible.*

Soluzione dell'esercizio 2.

(a$\Leftarrow$) Supponiamo $M \setminus Z$ sconnesso e sia M' la chiusura di una sua componente connessa. Denotiamo con $i' : Z \hookrightarrow M'$ e con $j : M' \hookrightarrow M$ le inclusioni naturali. Allora $\partial M' = Z$. Inoltre M' è orientatata e quindi $H_m(M', Z; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot \mu_{M'}$. Dalla successione esatta

$$0 \to H_m(M', Z; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(Z;\mathbb{Z}) \xrightarrow{i'_*} H_{m-1}(M';\mathbb{Z})$$

otteniamo che $\partial \mu_{M'} = \pm \mu_Z$ e dunque $i'_*\mu_Z = 0$ in $H_{m-1}(M';\mathbb{Z})$. Di consequenza, $[Z] = i_*\mu_Z = j_*(i'_*\mu_Z) = 0$ in $H_{m-1}(M;\mathbb{Z})$.

(a$\Rightarrow$)+(b) Viceversa, supponiamo $M \setminus Z$ connessa. Consideriamo un piccolo archetto orientato α su M che intersechi Z trasversalmente in un unico punto z. Gli estremi p, q di α giacciono in $M \setminus Z$ che è connessa (e quindi connessa per archi) per ipotesi: dunque esiste un cammino β tutto in $M \setminus Z$ che connette p e q. Sia γ il cammino $\alpha * \beta$, che orientiamo a piacere. Dunque $[\gamma] \in H_1(M;\mathbb{Z})$ e $[\gamma] \cdot [Z] = \pm 1$. Ne segue che $[Z] \neq 0$ e che $[Z]$ non è divisibile (infatti, se fosse $[Z] = d \cdot \nu$ con $d \geq 2$ intero, allora $[\gamma] \cdot [Z] = d \cdot ([\gamma] \cdot [\nu])$ sarebbe divisibile per d).

(c) Sia $M = \mathbb{CP}^2$ e sia W una ipersuperficie liscia di grado $d \geq 2$ (per esempio $W = \{X_0^d + X_1^d + X_2^d = 0\}$). Abbiamo visto in classe che $[W] = d \cdot [\ell] \in H_{2n-2}(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot [\ell]$, dove ℓ è una qualunque retta proiettiva complessa di $\mathbb{CP}^2$. Dunque $[W]$ è divisibile per d.

Infine, notiamo che W è connessa. Infatti, se non lo fosse, avremmo $W = W_1 \cup W_2$ con $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Dunque $[W_1] = d_1 \cdot [\ell]$ e $[W_2] = d_2 \cdot [\ell]$ con $d_1, d_2 \geq 1$. Ne segue che $[W_1] \cdot [W_2] = d_1 d_2 > 0$, il che contraddice $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Esercizio 3.
Sia X *un complesso di celle finito e sia* $SX = (X \times [0,1])/\sim$, *dove* $(x,t) \sim (x',t')$ *se e solo se*

$t = t' \in \{0, 1\}$.
Dimostrare che $H^*(SX;\mathbb{Z})$ ha cup product nullo in gradi positivi, ossia $\alpha \cup \beta = 0$ per ogni $\alpha \in H^n(SX;\mathbb{Z})$ e $\beta \in H^m(SX;\mathbb{Z})$ e $n, m > 0$.

Soluzione dell'esercizio 3. Supponiamo ovviamente X non vuoto, cosicché SX è non vuoto e connesso. Sia Σ l'insieme (finito e non vuoto) delle celle di X.
Denotiamo con p_0 e p_1 rispettivamente i punti di SX corrispondenti alle classi di equivalenza di $X \times \{0\}$ e di $X \times \{1\}$. Sia Y lo spazio ottenuto da SX identificando p_0 con p_1 in un unico punto (che chiameremo $p \in Y$) e sia $f : SX \to Y$ la proiezione al quoziente.
Gli spazi SX e Y hanno una naturale struttura di CW complessi. Le 0-celle di SX sono p_0 e p_1; l'unica 0-cella di Y è p. Per ogni k-cella $\sigma^k \in \Sigma$ di X abbiamo una $(k+1)$-cella $\sigma^k \times e$ in SX e in Y, dove $e = [0, 1]$. Essendo X un CW complesso finito, per ogni cella σ di X, denotiamo con $\sigma^\vee$ la cocatena intera di X che vale 1 sulla cella σ e 0 su tutte le altre. In modo simile, denotiamo con $e^\vee$ la cocatena su $[0, 1]$ (inteso come complesso di celle, con 0-cellle $\{0, 1\}$ e come 1-cella e) che vale 1 su e e 0 sulle 0-celle. Dunque una base delle cocatene intere di SX è data da $\{p_0^\vee, p_1^\vee\} \cup \{\sigma^\vee \otimes e^\vee \,|\, \sigma \in \Sigma\}$ e una base delle cocatene intere di Y è data da $\{p^\vee\} \cup \{\sigma^\vee \otimes e^\vee \,|\, \sigma \in \Sigma\}$.
Da tale descrizione è chiaro che $f^* : H^*(Y;\mathbb{Z}) \to H^*(SX;\mathbb{Z})$ è suriettiva (a livello di cocatene, f^* manda $p^\vee$ in $p_0^\vee + p_1^\vee$). Essendo f^* un omomorfismo di anelli, basta dimostrare che il cup product di due classi di $H^*(Y;\mathbb{Z})$ di grado positivo si annulla.
Ora Y è il quoziente di $X \times S^1$ per la relazione che identifica $X \times \{q\}$ ad un punto p (dove $q = [0]$ è un punto di $S^1 = [0, 1]/(0 \sim 1)$): sia $g : X \times S^1 \to Y$ la mappa quoziente. Una base delle cocatene per $X \times S^1$ è dato da $\{q^\vee \times \sigma^\vee, e^\vee \times \sigma^\vee \,|\, \sigma \in \Sigma\}$. Notiamo che $H^0(S^1;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\cdot q^\vee$ e $H^1(S^1;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\cdot e^\vee$ e che la mappa $g^* : C^*(Y;\mathbb{Z}) \to C^*(X \times S^1;\mathbb{Z})$ soddisfa $g^*(p^\vee) = q^\vee$ e $g^*(\sigma^\vee \otimes e^\vee) = \sigma^\vee \otimes e^\vee$.
In effetti, abbiamo visto in classe che $H^*(X \times S^1;\mathbb{Z}) \cong H^*(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(S^1;\mathbb{Z})$. Da questo segue che $g^* : H^*(Y;\mathbb{Z}) \to H^*(X \times S^1;\mathbb{Z})$ è iniettiva.
Inoltre il cup product in $X \times S^1$ soddisfa

$$(\alpha_1 \otimes \beta_1) \cup (\alpha_2 \otimes \beta_2) = (-1)^{deg(\alpha_2)deg(\beta_1)}(\alpha_1 \cup \alpha_2) \otimes (\beta_1 \cup \beta_2)$$

se α_i, β_j sono classi di coomologia omogenee. Dunque, $(\alpha \times e^\vee) \cup (\alpha' \times e^\vee) = \pm(\alpha \cup \alpha') \otimes (e^\vee \cup e^\vee) = \pm(\alpha \cup \alpha') \cup 0 = 0$ in $H^*(X \times S^1;\mathbb{Z})$. Lo stesso allora vale in $H^*(Y;\mathbb{Z})$, da cui la tesi.

Esercizio 4. *Siano $n > k > 0$ interi e sia $S^k \subset S^n$ la sfera corrispondente a $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$, dove $x_0, \ldots, x_n$ sono coordinate standard di $\mathbb{R}^{n+1} \supset S^n$.*
Calcolare i gruppi di omologia $H_*(X;\mathbb{Z})$ di $X = S^n/\sim$, dove $x \sim (-x)$ per ogni $x \in S^k$.

Soluzione dell'esercizio 4. Se $k = n$, otteniamo $X = \mathbb{RP}^n$ che già conosciamo. Supponiamo dunque $0 \le k \le n-1$.
Dotiamo S^n della struttura cellulare con 2 celle antipodali in ogni dimensione fra 0 e n. Con tale struttura cellulare, abbiamo $C_\ell(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ per ogni $0 \le \ell \le n$. Le mappe di bordo $d_\ell : C_\ell(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \cong C_{\ell-1}(S^n;\mathbb{Z})$ sono date da

$$d_\ell^{S^n} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } \ell \text{ è dispari} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{se } \ell \text{ è pari} \end{cases}$$

Notiamo che la mappa quoziente $p : S^n \to X$ è cellulare ed identifica ℓ-celle antipodali per $\ell = 0, \ldots, k$. Dunque

$$C_\ell(X;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } 0 \le \ell \le k \\ \mathbb{Z}^2 & \text{per } k+1 \le \ell \le n \end{cases}$$

Se $d_\ell^X : C_\ell(X;\mathbb{Z}) \to C_{\ell-1}(X;\mathbb{Z})$ è la mappa di bordo, allora d_ℓ^X coincide con quella di $\mathbb{RP}^k$ per $\ell \le k$ e coincide con quella di S^n per $\ell \ge k+2$. Quindi $H_\ell(X;\mathbb{Z}) \cong H_\ell(\mathbb{RP}^k;\mathbb{Z})$ per $\ell \le k-1$ e $H_\ell(X;\mathbb{Z}) \cong H_\ell(S^n;\mathbb{Z})$ per $\ell \ge k+2$. Per calcolare $H_k(X;\mathbb{Z})$ e $H_{k+1}(X;\mathbb{Z})$, dobbiamo analizzare d_{k+1}^X. È facile vedere che $d_{k+1}^X : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ si ottiene sommando le due righe di $d_{k+1}^{S^n} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$.
Distinguiamo due casi.
<u>Caso k pari.</u> La mappa $d_{k+1}^X : C_{k+1}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \cong C_k(X;\mathbb{Z})$ è nulla. Ricordando che $d_k^X = 2$ è iniettiva e che $d_{k+2}^X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ne segue che $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ e $H_{k+1}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Caso k dispari. La mappa $d^X_{k+1} : C_{k+1}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \cong C_k(X;\mathbb{Z})$ si identifica con $(2,-2)$. Ricordando che $d^X_k = 0$ è iniettiva e che $d^X_{k+2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ne segue che $H_k(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$ e $H_{k+1}(X;\mathbb{Z}) \cong 0$.