Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Pseudo-esame

Esercizio 1. Considerare $S^1, D^2 \subset \mathbb{C}$. Sia $k \in \mathbb{Z}$ dato. Sia X lo spazio topologico $X = S^1 \sqcup D^2/\sim$, dove $\sim$ identifica un punto $z \in \partial D^2$ con $z^k \in S^1$.
Determinare gli spazi topologici (a meno di omeomorfismo) rivestiti da X.

Esercizio 2.
Sia M una varietà compatta orientata e connessa di dimensione m e sia $Z \subset M$ una sottovarietà chiusa, orientata e connessa di codimensione 1. Denotiamo con $[Z]$ la classe $i_*\mu_Z \in H_{m-1}(M;\mathbb{Z})$, dove $i : Z \hookrightarrow M$ è l'inclusione e μ_Z è la classe fondamentale di Z.

(a) Dimostrare che $M \setminus Z$ è connesso $\iff$ $[Z] \neq 0$.

(b) Dimostrare che, se $[Z] \neq 0$, allora $[Z]$ non è divisibile
(ossia non esistono $\nu \in H_{m-1}(M;\mathbb{Z})$ e $d \in \mathbb{Z}$ tali che $d \cdot \nu = [Z]$).

(c) Mostrare che esiste una M come sopra e una $W \subset M$ chiusa, connessa, orientata di codimensione 2 tale che $[W] \neq 0$ e $[W]$ sia divisible.

Esercizio 3.
Sia X un complesso di celle finito e sia $SX = (X \times [0,1])/\sim$, dove $(x,t) \sim (x',t')$ se e solo se $t = t' \in \{0,1\}$.
Dimostrare che $H^*(SX;\mathbb{Z})$ ha cup product nullo in gradi positivi,
ossia $\alpha \cup \beta = 0$ per ogni $\alpha \in H^n(SX;\mathbb{Z})$ e $\beta \in H^m(SX;\mathbb{Z})$ e $n, m > 0$.

Esercizio 4. Siano $n > k > 0$ interi e sia $S^k \subset S^n$ la sfera corrispondente a $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$, dove $x_0, \ldots, x_n$ sono coordinate standard di $\mathbb{R}^{n+1} \supset S^n$.
Calcolare i gruppi di coomologia $H_*(X;\mathbb{Z})$ di $X = S^n/\sim$, dove $x \sim (-x)$ per ogni $x \in S^k$.