Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Esercizi - Foglio 7

Esercizio 1 (nerbo di un ricoprimento). Sia X uno spazio topologico paracompatto e sia $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto di X. Per ogni $J \subseteq I$ finito, scriviamo $U_J := \bigcap_{j \in J} U_j$. Sia $K^{\mathfrak{U}}$ il complesso simpliciale (detto *nerbo del ricoprimento* $\mathfrak{U}$) definito da $K_\ell := \{J \subset I \mid U_J \neq \emptyset \text{ e } \#J = \ell + 1\}$ per $\ell \geq 0$.

(a) Usando una partizione dell'unità adattata a $\mathfrak{U}$, dimostrare che esiste una mappa naturale $\Phi^{\mathfrak{U}} : X \to |K^{\mathfrak{U}}|$.

(b) Supponiamo $X = |L|$ sia la realizzazione di un complesso simpliciale e $\mathfrak{U}$ sia dato dalle stelle aperte dei vertici di L. Dimostrare che $K \cong L$.

(c) Sia $\mathfrak{U}' = \{U'_i \mid i \in I\}$ un raffinamento di $\mathfrak{U}$, ossia $U'_i \subset U_i$. Dimostrare che esiste una mappa $K' \to K$ di complessi simpliciali.

(d) Supponiamo che $\mathfrak{U}$ sia *aciclico*, ossia che, per ogni $J \subseteq I$ finito, l'aperto U_J sia vuoto oppure si abbia $H_0(U_J; R) \cong R$ e $H_d(U_J; R) = 0$ per $d > 0$. Dimostrare che $\Phi^{\mathfrak{U}}$ induce un isomorfismo $H_*(X; R) \to H_*(K; R)$.

(e*) Supponiamo che $\mathfrak{U}$ sia un *buon ricoprimento*, ossia che, per ogni $J \subseteq I$ finito, l'aperto U_J sia vuoto oppure contraibile. Dimostrare che $\Phi^{\mathfrak{U}}$ è un'equivalenza omotopica.

Definizione. Dato un complesso simpliciale K ed un vertice $v \in K_0$, il *link di* v è il sottocomplesso $\mathrm{Lk}(v)$ formato da tutti i $\sigma \in K$ tali che

(i) $v \notin \sigma$;

(ii) esiste un $\sigma' \in K$ che contiene v e σ (equivalentemente, σ' è contenuto nella stella chiusa di v).

Definizione. Un complesso simpliciale K si dice *equidimensionale di dimensione* d se ogni suo simplesso è faccia di un qualche d-simplesso. Il complesso simpliciale K si dice *una pseudo-varietà connessa di dimensione* d se

(i) K è equidimensionale di dimensione d;

(ii) ogni simplesso di dimensione $d-1$ è faccia di uno oppure due simplessi di dimensione d;

(iii) se σ, τ sono d-simplessi di K, esiste una successione $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m = \tau$ di d-simplessi tali che σ_i e σ_{i+1} hanno una faccia $(d-1)$-dimensionale in comune per ogni $i = 1, \ldots, m-1$.

Dato K pseudo-varietà connessa di dimensione d, il suo *bordo* ∂K è il sottocomplesso generato dai simplessi di dimensione $d-1$ che appartengono ad un solo simplesso di dimensione d.

Esercizio 2 (pseudo-varietà).
Sia K una pseudo-varietà connessa di dimensione d.

(a) Sia $d = 1$ e supponiamo K finito. Dimostrare che ∂K è vuoto oppure consiste di due 0-simplessi. Dimostrare che nel primo caso $|K|$ è omeomorfo a S^1 e nel secondo caso $|K|$ è omeomorfo a $[0, 1]$.

(b) Sia $d = 2$. Dimostrare che $|\partial K|$ non è necessariamente una varietà topologica. Dimostrare che, anche se $\partial K = \emptyset$, la realizzazione $|K|$ non è necessariamente una varietà topologica.

(c) Dimostrare che il link di un vertice di K è una pseudo-varietà di dimensione $d-1$.

(d) Sia $K^{(d-2)}$ il sottocomplesso formato dai simplessi di dimensione al più $d-2$. Dimostrare che $Y = |K| \setminus |K^{(d-2)}|$ è una varietà topologica connessa di dimensione d. Diciamo K è una *pseudo-varietà orientabile* se Y lo è.

(e) Supponiamo K finito. Dimostrare che K ha una "classe fondamentale" $\mu_K^{\mathbb{Z}/2} \in H_d(K, \partial K; \mathbb{Z}/2)$. Se K è orientabile, dimostrare che esiste una classe fondamentale $\mu_K \in H_d(K, \partial K; \mathbb{Z})$ per ciascuna delle due orientazioni di Y.

(f) Supponiamo K finito. Sia $\sigma \in K_\ell$ e sia σ^* il sottocomplesso di K' il cui k-simplessi sono le catene $(\sigma_0 = \sigma \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_k)$. Dimostrare che $|\sigma^*|$ è omeomorfo ad un disco chiuso $D^{d-\ell}$ e che $|\sigma| \cap |\sigma^*|$ è il baricentro di $|\sigma|$. Dimostrare che, se $\sigma \subset \tau$, allora $\tau^* \subset \sigma^*$. Dimostrare che $\bigcup_{\sigma \in K} |\sigma^*|$ è una decomposizione cellulare di $|K|$, detta *duale di* K e denotata con K^*.

(g) Supponiamo K finito. Sia $C_{d-\ell}(K^*)$ il modulo libero generato da σ^* con $\sigma \in K_\ell$. Dimostrare che $C^\ell(K, \partial K) \to C_{d-\ell}(K^*)$ definita da $\varphi \mapsto \sum_{\sigma \in K_\ell} \varphi(\sigma)\sigma^*$ induce un isomorfismo $C^*(K, \partial K) \to C_{d-*}(K^*)$ di complessi e dunque $\mathcal{D} : H^\ell(K, \partial K) \cong H_{d-\ell}(K^*)$.

(h) Supponiamo K orientato e finito. Dato $\sigma = \{v_0, \dots, v_l\} \in K_l$ e sia σ^* unione di $(d-\ell)$-simplessi del tipo $\sigma_\bullet = (\sigma_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_{d-\ell})$ con $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_j = \{v_0, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{l+j}\}$ e $\sigma_{d-\ell} = \{v_0, \dots, v_d\} \in K_d$. Allora $\sigma_\bullet$ è orientato in modo che $(v_0, \dots, v_d)$ sia un'orientazione positiva di $\sigma_{d-\ell}$. Dimostrare che in tal modo σ^* è un ciclo (relativamente al suo bordo topologico).

(i) Sia $\sigma \in K_\ell$. Verificare che, per ogni $\tau \in K_j$, l'insieme $\tau' \cap \sigma^*$ è un sottocomplesso di K' di dimensione $j-\ell$, non vuoto se $\tau \supseteq \sigma$. Sia $[\tau]\cdot\sigma^* := \sum_{\lambda \in \tau' \cap \sigma} [\lambda] \in C_{j-\ell}(K')$, dove $[\lambda]$ è orientato come $(\sigma = \lambda_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \lambda_{j-\ell})$ e $\lambda_{j-\ell}$ ha l'orientazione di $[\tau]$. Dimostrare che è quindi definito un *prodotto di intersezione* $H_{d-\ell}(K^*) \otimes H_j(K, \partial K) \to H_{j-\ell}(K')$ tale che $\mathcal{D}(\varphi) \cdot c = \varphi \cap c$.

Esercizio 3 (push-forward in coomologia di de Rham).
Siano M, B varietà differenziabili orientate di dimensione $m+f$ e m e sia $p : M \to B$ una fibrazione C^∞ propria. Sia ω una m-forma mai nulla su B.

(a) Dimostrare che ogni fibra $M_b := p^{-1}(b)$ ha una orientazione naturale.

(b) Sia α una k-forma su M. Definiamo $p_!\alpha$ come l'unica $(k-f)$-forma su B tale che

$$\int_B (\pi_!\alpha) \wedge \beta = \int_{p^{-1}(B)} \alpha \wedge (\pi^*\beta)$$

per ogni $(m+f-k)$-forma β a supporto compatto su B. Dimostrare che $p_!$ induce una mappa $H^k_{dR}(M) \to H^{k-f}_{dR}(B)$.

(c) Dimostrare che, se M e B sono compatte, allora $\pi_! = D_B \pi_* D_M$, dove D_B e D_M sono le dualità di Poincaré su B e su M.

Esercizio 4 (coomologia di $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ e di $\mathrm{SU}(n)$).

(a) Dimostrare che $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) \cong S^1$ e che $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$.

(b) Sia $n \geq 3$. Dimostrare che $\mathrm{SU}(n)$ agisce su S^{2n-1} e che vi è una naturale fibrazione liscia $p : \mathrm{SU}(n) \to S^{2n-1}$ con fibra $\mathrm{SU}(n-1)$.

(c) Decomporre S^{2n-1} in due calotte $D_+ \cup D_-$ e chiamare $A_+ := p^{-1}(D_+)$ e $A_- := p^{-1}(D_-)$. Dimostrare che $A_+ \cong D_+ \times \mathrm{SU}(n-1)$ e a $A_- \cong D_- \times \mathrm{SU}(n-1)$.

(d) Usare Mayer-Vietoris con gli aperti A_+, A_- e l'induzione su n per dimostrare che $H^*(\mathrm{SU}(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle 1, u_3, u_5, \dots, u_{2n-1}\rangle$, dove u_{2i+1} ha grado $2i+1$. Dimostrare inoltre che l'inclusione naturale $\mathrm{SU}(n-1) \hookrightarrow \mathrm{SU}(n)$ induce in coomologia la mappa $\mathbb{Z}\langle 1, u_3, u_5, \dots, u_{2n-1}\rangle \mapsto \mathbb{Z}\langle 1, u_3, u_5, \dots, u_{2n-1}\rangle / \langle u_{2n-1}\rangle = \mathbb{Z}\langle 1, u_3, u_5, \dots, u_{2n-3}\rangle$.

(e) Dimostrare che $\mathrm{U}(n) \cong \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)$ e dunque $H^*(\mathrm{SU}(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle 1, u_1, u_3, \dots, u_{2n-1}\rangle$.

(f) Adattare l'argomento precedente alla fibrazione $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \to S^{n-1}$ con fibra $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$, usando coefficienti $\mathbb{Z}/2$. Dimostrare quindi che $H^*(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R});\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2\langle 1, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\rangle$, dove v_j ha grado j, e che l'inclusione naturale $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ induce in coomologia la mappa $\mathbb{Z}\langle 1, v_1, \dots, v_{n-1}\rangle \mapsto \mathbb{Z}\langle 1, v_1, \dots, v_{n-1}\rangle / \langle v_{n-1}\rangle = \mathbb{Z}\langle 1, v_1, \dots, v_{n-2}\rangle$.

(g) Dimostrare che $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{O}(1,\mathbb{R})$ e dunque $H^*(\mathrm{O}(n,\mathbb{R});\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2\langle 1, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\rangle$.