Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Esercizi - Foglio 6

Definizione (grado).
Siano M, N varietà compatte e orientabili di dimensione n e siano $\mu_M \in H_n(M;\mathbb{Z})$ e $\mu_N \in H_n(N;\mathbb{Z})$ le loro classi fondamentali. Supponiamo N connessa, cosicché $H_n(N;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \cdot \mu_N$. Il **grado** di un'applicazione continua $f : M \to N$ è l'unico intero $d \in \mathbb{Z}$ tale che $f_*(\mu_M) = d \cdot \mu_N$. Scriveremo $\deg(f) = d$.

Definizione (grado locale o indice).
Siano M, N varietà orientate di dimensione $n \geq 1$ e siano $\alpha_M \in \Gamma(M, \widetilde{M_{\mathbb{Z}}})$ e $\alpha_N \in \Gamma(N, \widetilde{N_{\mathbb{Z}}})$ le orientazioni. Sia $y \in N$. Notare che, se $\{X_i\}$ sono le componenti connesse di $X := f^{-1}(y)$, allora $H_n(M, M - X;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_i H_n(M, M - X_i;\mathbb{Z})$. Sia ora $x \in M$ un punto isolato di $f^{-1}(y)$, da cui segue che $H_n(M, M - \{x\};\mathbb{Z})$ è un addendo diretto di $H_n(M, M - X;\mathbb{Z})$. Il **grado locale** (o **indice**) della mappa f in x è l'unico intero $d_x \in \mathbb{Z}$ tale che $f_* : H_n(M, M - \{x\};\mathbb{Z}) \subset H_n(M, M - X;\mathbb{Z}) \to H_n(N, N - \{y\};\mathbb{Z})$ soddisfi $f_*(\alpha_M(x)) = d_x \cdot \alpha_N(y)$. Scriveremo $\deg_x(f) = d_x$.

(Per M, N non necessariamente orientabili, le stesse definizioni con coefficienti in $\mathbb{Z}/2$ definiscono un **grado modulo 2***, che denoteremo con $\deg^{\mathbb{Z}/2}(f) \in \mathbb{Z}/2$, e un* **grado locale modulo 2** *in $x \in M$, che denoteremo con $\deg_x^{\mathbb{Z}/2}(f) \in \mathbb{Z}/2$.)*

Esercizio 1 (grado, parte prima).

(a) Sia M varietà compatta di dimensione n. Dimostrare che esiste un'applicazione continua $f : M \to S^n$ tale che $\deg^{\mathbb{Z}/2}(f) = 1$. Se M è orientata, dimostrare che esiste un'applicazione $f : M \to S^n$ tale che $\deg(f) = 1$.

(b) Siano M, N varietà compatte di dimensione n e supponiamo N connessa. Sia $f : M \to N$ tale che $\deg^{\mathbb{Z}/2}(f) \neq 0$ (oppure supponiamo M, N orientate e $\deg(f) \neq 0$). Dimostrare che f è suriettiva.

(c) Sia $f : M \to N$ continua tra varietà compatte di dimensione n e supponiamo N connessa. Sia $y \in N$ e supponiamo che $f^{-1}(y)$ consti di finiti punti, ossia $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Dimostrare che $\deg^{\mathbb{Z}/2}(f) = \sum_{i=1}^k \deg_{x_i}^{\mathbb{Z}/2}(f)$. Inoltre, se M e N sono orientate, dimostrare che $\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg_{x_i}(f)$.

(d) Siano M, N varietà C^∞ orientate di dimensione n, sia $x \in M$ e poniamo $y = f(x) \in N$. Sia $f : M \to N$ un'applicazione C^∞ tale che $df_x : T_xM \to T_yN$ sia invertibile. Dimostrare che $\deg_x(f) = +1$ se df_x preserva l'orientazione e che $\deg_x(f) = -1$ se df_x rovescia l'orientazione.

Esercizio 2 (grado, parte seconda).

(a) Sia $p : \widetilde{N} \to N$ un rivestimento a d fogli tra varietà connesse compatte di dimensione n. Dimostrare che $\deg^{\mathbb{Z}/2}(p) = \bar{d} \in \mathbb{Z}/2$. Se N è orientabile, dimostrare che $\widetilde{N}$ è orientabile; in tal caso, comunque siano scelte le orientazioni di N e $\widetilde{N}$, dimostrare che $\deg(p) = \pm d$.

(b) Siano M, N varietà connesse compatte e orientate di dimensione n. Dimostrare che ogni $f : M \to N$ continua di grado 1 induce una suriezione $f_* : \pi_1(M, x) \to \pi_1(N, f(x))$ e dunque una suriezione $f_* : H_1(M;\mathbb{Z}) \to H_1(N;\mathbb{Z})$.
(Suggerimento: sia $p : \tilde{N} \to N$ il rivestimento associato al sottogruppo $f_*(\pi_1(M, x)) \subseteq \pi_1(N, f(x))$; fattorizzare f come $M \to \tilde{N} \to N$ e considerare separatamente i casi in cui p abbia finiti oppure infiniti fogli.)

(c) Siano Σ_h, Σ_g superfici compatte connesse e orientate di genere h e g rispettivamente. Dimostrare che esiste un'applicazione $f : \Sigma_h \to \Sigma_g$ di grado 1 se e solo se $h \geq g$.

Esercizio 3 (limiti diretti).
Sia I un insieme diretto di indici e sia $\{G_\alpha,\ f_{\alpha\beta}\}$ un sistema diretto di gruppi abeliani, ossia $\alpha \mapsto G_\alpha$ e $(\alpha \leq \beta) \mapsto (f_{\alpha\beta} : G_\alpha \to G_\beta)$.

(a) Dimostrare che, per ogni gruppo H finitamente generato e per ogni iniezione $j : H \hookrightarrow \varinjlim G_\alpha$, esiste un $\gamma \in I$ e un omomorfismo $j_\gamma : H \hookrightarrow G_\gamma$ tale che $j = i_\gamma \circ j_\gamma$, dove $i_\gamma : G_\gamma \to \varinjlim G_\alpha$ è la mappa naturale.

(b) Dimostrare che, se G_α sono tutti senza torsione, allora $\varinjlim G_\alpha$ è senza torsione.

(c) Supponiamo che $d_\alpha : G_\alpha \to G_\alpha$ sia un differenziale (ossia $d_\alpha \circ d_\alpha = 0$) e che $f_{\alpha\beta}$ is un morfismo di complessi (ossia $d_\beta \circ f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} \circ d_\alpha$). Dimostrare che $\varinjlim G_\alpha$ ha un differeziale d tale che la mappa naturale $(G_\gamma, d_\gamma) \to (\varinjlim G_\alpha, d)$ sia un morfismo di complessi per ogni $\gamma \in I$. Dimostrare quindi che $\varinjlim H(G_\alpha, d_\alpha) \cong H(\varinjlim G_\alpha, d)$, dove $H(C, \delta)$ denota l'omologia $\ker(\delta)/\mathrm{Im}(\delta)$.

Esercizio 4 (caratteristica di Eulero di una somma connessa).
Siano M_1 e M_2 due varietà compatte di dimensione n e sia $M_1 \# M_2$ una somma connessa.
Dimostrare che $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(S^n)$.

Esercizio 5.

(a) Sia M una varietà compatta e connessa di dimensione n. Dimostrare che il sottogruppo di torsione di $H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ è $\{0\}$ se M è orientabile, isomorfo a $\mathbb{Z}/2$ se M non è orientabile.

(b) Sia M una varietà compatta, connessa e orientabile, di dimensione $n = 2k$. Dimostrare che, se $H_{k-1}(M; \mathbb{Z})$ non ha torsione, allora $H_k(M; \mathbb{Z})$ non ha torsione.

(c) Sia M una varietà compatta e connessa di dimensione 3 tale che $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus G$, dove G è un gruppo abeliano finito. Dimostrare che $H_2(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ se M è orientabile, $H_2(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/2$ se M non è orientabile. (Concludere che, se M non è orientabile, allora $r \geq 1$.)

Esercizio 6 (classi fondamentali).
Sia $R = \mathbb{Z}; \mathbb{Z}/2$ e sia M una varietà R-orientabile di dimensione n, compatta e con bordo ∂M.

(a) Dimostrare che ∂M è R-orientabile.

(b) Dimostrare che la mappa naturale $H^i_c(M \setminus \partial M; G) \to H^i(M, \partial M; G)$ è un isomorfismo per ogni i e G.

(c) Se M è compatta e orientata, dimostrare che la mappa $H_n(M, \partial M; R) \to H_{n-1}(\partial M; R)$ manda la classe fondamentale di $(M, \partial M)$ in una classe fondamentale di ∂M.

(d) Dimostrare che non esiste una retrazione di M su ∂M.

(e) Sia M una varietà compatta, di dimensione n, contraibile, con bordo. Dimostrare che ∂M ha l'omologia di una S^{n-1}.

Esercizio 7 (superfici orientate).
Sia Σ_g un superficie connessa, compatta, orientata, di genere g.

(a) Sia $\Gamma \subset \Sigma_g$ un grafo (ossia un CW complesso di dimensione 1 immerso in Σ_g). Dimostrare che, se Σ_g si retrae su Γ, allora $H_1(\Gamma; \mathbb{Z})$ ha rango al massimo g.

(b) Per ogni $1 \leq k \leq g$, costruire un grafo $\Gamma \subset \Sigma_g$ omeomorfo ad un bouquet di k copies di S^1 e una retrazione $\Sigma_g \to \Gamma$.

(c) Sia $S \subset \Sigma_g$ una sottosuperficie connessa, compatta, di genere h, con una componente di bordo (e quindi $\partial S \cong S^1$). Dimostrare che, se Σ_g si retrae su S, allora $h \leq g/2$.