Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Esercizi - Foglio 5

<u>**Definizione:**</u> *Sia R un gruppo abeliano e X uno spazio topologico non vuoto. L'***omologia ridotta** $\widetilde{H}_*(X;R)$ *è il nucleo dell'omomorfismo $c_* : H_*(X;R) \to H_*(P;R) \cong R$ indotto dalla mappa costante $c : X \to P$, dove P è lo spazio topologico che consta di un solo punto. Se (X,A) è una coppia di spazi topologici con $A \neq \emptyset$, si definisce $\widetilde{H}_*(X,A;R) := H_*(X,A;R)$.*
In modo simile, la **coomologia ridotta** $\widetilde{H}^*(X;R)$ *è il conucleo di $c^* : R \cong H^*(P;R) \to H^*(X;R)$ e si pone $\widetilde{H}^*(X,A;R) := H^*(X,A;R)$ se $A \neq \emptyset$.*

Esercizio 1 (proiettivo reale a coefficienti $\mathbb{Z}/2k$).
Sia $k \geq 1$. Dimostrare che $H^*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2k) \cong \mathbb{Z}/2k[\alpha,\beta]/(2\alpha, 2\beta, \alpha^2 - k\beta)$, dove il grado di α è 1 e quello di β è 2.

Esercizio 2 (moltiplicazione per d in $\mathbb{CP}^n$).
Siano $d \geq 1$ e $n \geq 1$. Denotiamo con $m_{n,d} : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ la mappa $m_{n,d}(X_0, X_1, \dots, X_n) = (X_0^d, X_1^d, \dots, X_n^d)$ e con $\overline{m}_{n,d} : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ la mappa indotta.

(a) Calcolare l'endomofirsmo indotto su $H^*(\mathbb{CP}^1;\mathbb{Z})$ da $m_{1,d}$.

(b) Calcolare l'endomorfismo indotto su $H^*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z})$ da $m_{n,d}$.

Esercizio 3 (cross-product).
Siano X e Y insiemi discreti infiniti. Dimostrare che $H^*(X;\mathbb{Z})$ e $H^*(Y;\mathbb{Z})$ sono $\mathbb{Z}$-moduli liberi ma che il cross-product $H^*(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(Y;\mathbb{Z}) \to H^*(X \times Y;\mathbb{Z})$ non è un isomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli.
[In classe abbiamo dimostrato un teorema dall'enunciato simile, ma in cui credo di aver omesso un'ipotesi essenziale: se X, Y sono complessi di celle, R è un dominio a ideali principali e $H^*(Y;R)$ è libero <u>e finitamente generato su come R-modulo</u>, allora $H^*(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(Y;\mathbb{Z}) \to H^*(X \times Y;\mathbb{Z})$ è un isomorfismo di R-algebre. Individuare come entri nella dimostrazione l'ipotesi di finita generazione.]

Esercizio 4.
Mostrare che l'identificazione $\mathbb{R}^{2n+2} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n+1}$ induce un'applicazione $q_n : \mathbb{RP}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ e quindi una $q_\infty : \mathbb{RP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$. Sia inoltre $r_n : \mathbb{RP}^{2n} \to \mathbb{CP}^n$ la mappa indotta dalla composizione $\mathbb{R}^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n+1}$.

(a) Mostrare che la mappa $r_1 : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{CP}^1$ induce una suriezione $r_1^* : H^2(\mathbb{CP}^1;\mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z})$.

(b) Mostrare che $q_\infty^* : H^*(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z})$ è suriettiva nei gradi pari.

(c) Sia X_n ottenuto da $\mathbb{RP}^\infty \coprod \mathbb{CP}^n$ identificando ogni punto $p \in \mathbb{RP}^{2n} \subset \mathbb{RP}^\infty$ con $r_n(p) \in \mathbb{CP}^n$. Dimostrare che $H^*(X_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\beta]/(2\beta^{n+1})$ e che $H^*(X_n;\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[\beta,\eta]/(\eta^2 - \beta^{2n+1})$, dove β ha grado 2 e η ha grado $2n+1$.

Esercizio 5 (rivestimento di orientazione).
Sia M una varietà differenziabile connessa di dimensione $n \geq 1$ e sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlante. Sia $\bigwedge^n T^*M$ il fibrato delle n-forme differenziabili su M, i cui punti sono le coppie (x,ψ), dove $x \in M$ e $\psi \in \bigwedge^n T_x^*M$, e sia $Z \subset \bigwedge^n T^*M$ la sezione nulla (ossia il luogo delle coppie (x,ψ) con $\psi = 0$). Chiamiamo $\widetilde{M}$ lo spazio ottenuto da $(\bigwedge^n T^*M) \setminus Z$ identificando (x,ψ) con (x,ψ') se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tale che $\psi' = \lambda\psi$.

(a) Dimostrare che la mappa $p : \widetilde{M} \to M$ definita come $p(x,[\psi]) := x$ è un rivestimento di grado 2, e che inoltre $\widetilde{M}$ è munita di un'unica struttura di varietà differenziabile tale che p sia un locale diffeomorfismo.

(a') Dimostrare che $p^{-1}(x)$ è in naturale corrispondenza biunivoca con l'insieme dei generatori (come gruppo abeliano) di $H_n(M, M \setminus \{x\};\mathbb{Z})$.

(b) Dimostrare che $\widetilde{M}$ è orientabile. *La mappa p prende il nome di* **rivestimento di orientazione**.

Sia $x_0 \in M$ un punto base e sia $\gamma : [0,1] \to M$ un cammino chiuso con $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Sia $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ una suddivisione di $[0,1]$ tale che $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ è contenuto nella carta U_{α_i}, e poniamo $\alpha_{k+1} := \alpha_0$ per convenzione. Se σ_i è il segno ± 1 del determinante jacobiano del cambio di carta $\varphi_{\alpha_i,\alpha_{i+1}}$, definiamo $\sigma(\gamma) := \sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_k$. *(Si dice che γ* **preserva l'orientazione** *se $\sigma(\gamma) = +1$ e che* **rovescia l'orientazione** *se $\sigma(\gamma) = -1$.)*

(c) Mostrare che $\sigma(\gamma)$ è indipendente dalla suddivisione e dalle carte scelte per coprire $\gamma([0,1])$. Mostrare che, se $\gamma \simeq \gamma'$ sono cammini omotopi, allora $\sigma(\gamma) = \sigma(\gamma')$ e dunque è indotto un omomorfismo

$$\sigma : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

(d) Sia $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Mostrare che $p_*(\pi_1(\widetilde{M}, \tilde{x}_0)) = \ker(\sigma)$. Concludere che $\widetilde{M}$ è connessa se e solo se M è orientabile.

Esercizio 6 (transfer in coomologia).
Sia R un anello commutativo con unità e sia $r : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento di grado d. Dimostrare che esiste una mappa di transfer in coomologia $r_! : H^*(\widetilde{X}; R) \to H^*(X; R)$ tale che $r_! \circ r^* : H^*(X; R) \to H^*(X; R)$ è la moltiplicazione per d (e che ha proprietà analoghe alla mappa di transfer in omologia già vista).

Esercizio 7 (superfici non orientabili).
Sia Σ un superficie connessa, compatta e non orientabile. Determinare la struttura di R-algebra (con il cup product) di $H^*(\Sigma; R)$ per $R = \mathbb{Z}$ oppure $R = \mathbb{Z}/2$.

Esercizio 8.
Sia Σ un superficie connessa e compatta.

(a) Dimostrare che, per ogni $\alpha \in H^1(\Sigma; \mathbb{Z}/2)$, esiste un $\beta \in H^1(\Sigma; \mathbb{Z}/2)$ tale che $\alpha \smile \beta \neq 0$.

(b) Dimostrare che Σ non è omotopicamente equivalente ad un bouquet di due CW complessi X e Y, entrambi con coomologia ridotta non banale.

Esercizio 9 (somma connessa).
Siano M_1 e M_2 varietà differenziabili connesse e orientabili di dimensione n. Per ogni $i = 1, 2$, sia $B'_i \subset M_i$ un sottoinsieme diffeomorfo ad una palla aperta n-dimensionale e sia $B_i \subset M_i$ tale che $\overline{B}_i$ è diffeomorfo ad una palla chiusa n-dimensionale strettamente contenuta in B'_i.
Definiamo la **somma connessa $M_1 \# M_2$** come lo spazio ottenuto incollando $M_1 \setminus B_1$ e $M_2 \setminus B_2$ tramite un diffeomorfismo $\varphi : \partial B_1 \xrightarrow{\sim} \partial B_2$ che rovescia l'orientazione (poiché $S^{n-1} \cong \partial B_i = \partial M_i$, tale sfera ha un'orientazione indotta da quella di M_i).
Dimostrare che $H^*(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}) \cong H^*(M_1; \mathbb{Z}) \times H^*(M_2; \mathbb{Z})/(e_1 - e_2, \omega_1 - \omega_2)$ come anelli, dove e_i è il generatore di $\mathbb{Z} \cong H^0(M_i; \mathbb{Z})$ e ω_i è il generatore di $H^n(M_i; \mathbb{Z})$ positivo rispetto all'orientazione data di M_i.
(Ossia: $H^n(M_i; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^n(M_i; \mathbb{R}) \cong H^n_{dR}(M_i)$, il cociclo ω_i può essere visto come una n-forma differenziale; inoltre, l'orientazione di M_i data determina un ciclo singolare $[M_i]$ che genera $H_n(M_i; \mathbb{Z})$. Tale cociclo è quindi positivo rispetto all'orientazione data di M_i se $\int_{[M_i]} \omega_i = +1$.)