Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Esercizi - Foglio 4

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Consideriamo l'inclusione $i_n : \mathbb{KP}^n \hookrightarrow \mathbb{KP}^{n+1}$ tale che $i_n([X_0 : \cdots : X_n]) = [X_0 : \cdots : X_n : 0]$ e definiamo $\mathbb{KP}^\infty$ come il limite dei $\mathbb{KP}^n$, ossia

$$\mathbb{KP}^\infty := \coprod_{n \geq 0} \mathbb{KP}^n / \sim$$

dove $\sim$ è la più piccola relazione di equivalenza che contenga $[X] \sim i_n([X])$ per ogni $n \geq 0$ e per ogni $[X] \in \mathbb{KP}^n$.

Esercizio 1 (spazio proiettivo complesso).
Sia R un anello commutativo con unità.
Dimostrare che $H^*(\mathbb{CP}^n; R) \cong R[H]/(H^{n+1})$ dove H è un generatore di $H^2(\mathbb{CP}^n; R)$.
Dimostrare che $H^*(\mathbb{CP}^\infty; R) \cong R[H]$ dove H genera $H^2(\mathbb{CP}^\infty; R)$.

Esercizio 2 (spazio proiettivo reale).
Dimostrare che $H^*(\mathbb{RP}^{2m}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[b]/(2b, b^{m+1})$ dove b è un generatore di $H^2(\mathbb{RP}^{2m}; \mathbb{Z})$, e che $H^*(\mathbb{RP}^{2m+1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[b, \omega]/(2b, b^{m+1}, \omega^2, b\omega)$ dove b è un generatore di $H^2(\mathbb{RP}^{2m+1}; \mathbb{Z})$ e ω è un generatore di $H^{2m+1}(\mathbb{RP}^{2m+1}; \mathbb{Z})$.
Dimostrare che $H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[h]$, dove h genera $H^1(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2)$, e che $H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[b]/(2b)$, dove b genera $H^2(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z})$.

Esercizio 3 (ricoprimento contraibile).
Sia R un anello commutativo con unità. Sia X un complesso di celle connesso.

(a) Supponiamo che $X = A \cup B$, dove $A, B \subset X$ sono aperti contraibili.
Usando $\smile : H^*(X, A; R) \otimes H^*(X, B; R) \to H^*(X, A \cup B; R)$, dimostrare che il prodotto cup $\alpha \smile \eta \in H^*(X; R)$ si annulla se α, η hanno entrambe grado positivo.

(b) Supponiamo che $X = A_1 \cup \cdots \cup A_m$, dove $A_i \subset X$ è un aperto contraibile per ogni i.
Dimostrare che il prodotto cup di m classi di grado positivo in $H^*(X; R)$ si annulla.

Esercizio 4 (sospensione).
Sia X un complesso di celle connesso e sia R un anello commutativo con unità.
Calcolare la struttura di R-algebra di $H^*(SX; R)$ in funzione di $H^*(X; R)$, dove SX è la sospensione di X (ossia $SX = X \times [-1, 1]/\sim$, dove $(x, -1) \sim (x', -1)$ and $(x, 1) \sim (x', 1)$ for all $x \in X$).

Esercizio 5.
Sia $i : \mathbb{RP}^k = \{X_{k+1} = \cdots = X_n = 0\} \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$ con $0 < k < n$.
Usando il cup product in coomologia a coefficienti in $\mathbb{Z}/2$, dimostrare che non esiste alcuna retrazione $r : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^k$ (ossia tale che $r \circ i = id_{\mathbb{RP}^k}$).

Esercizio 6.
Usare il cup product per dimostrare che $\mathbb{RP}^2 \vee S^3$ non è omotopicamente equivalente a $\mathbb{RP}^3$.

Esercizio 7.
Siano $n, m \geq 1$. Mostrare che ogni applicazione continua $f : S^{n+m} \to S^n \times S^m$ induce l'applicazione banale $f^* : H^{n+m}(S^n \times S^m; \mathbb{Z}) \to H^{n+m}(S^{n+m}; \mathbb{Z})$ e quindi l'applicazione banale $f_* : H_{n+m}(S^{n+m}; \mathbb{Z}) \to H_{n+m}(S^n \times S^m; \mathbb{Z})$.

Esercizio 8.
Sia R un anello commutativo con unità.
Dimostrare che le coomologie di $S^3 \times \mathbb{CP}^\infty$ e di $(S^1 \times \mathbb{CP}^\infty)/(S^1 \times \{p_0\})$ a coefficienti in R sono isomorfe come R-algebre, dove p_0 è un punto di $\mathbb{CP}^\infty$.

Esercizio 9.
Sia $M(\mathbb{Z}/m, n)$ il complesso di celle da S^n attaccando una singola $(n+1)$-cella per mezzo di una mappa $\partial e^{n+1} \to S^n$ di grado m. Sia $f : M(\mathbb{Z}/m, n) \to S^{n+1}$ l'applicazione che collassa l'n-scheletro di $M(\mathbb{Z}/m, n)$ (ossia la S^n iniziale) ad un punto.
Considerare la mappa $(f, id) : M(\mathbb{Z}/m, n) \times M(\mathbb{Z}/m, n) \to S^{n+1} \times M(\mathbb{Z}/m, n)$ e dimostrare che lo spezzamento predetto dal teorema di Künneth non può essere funtoriale.