Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Esercizi - Foglio 3

Esercizio 1.
Sia A un dominio di integrità e sia K il suo campo dei quozienti. Dimostrare che

$$(- \otimes_A K) : (A - \mathrm{mod}) \longrightarrow (A - \mathrm{mod})$$

è un funtore esatto.

Esercizio 2.
Sia G un gruppo abeliano e sia $G^{tor} \subset G$ il sottogruppo dei suoi elementi di torsione. Dimostrare che

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong G^{tor}$$

e dedurne che $G^{tor} = 0 \iff \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, H) = 0$ per ogni gruppo abeliano H.

Esercizio 3.
Siano G e H gruppi abeliani. Dimostrare che $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, H)$ è un gruppo di torsione.
Dimostrare che $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, H)$ contiene un elemento di ordine $d \geq 2$ se e solo se G e H contengono entrambi un elemento di ordine d.

Esercizio 4.
Sia $i : \mathbb{RP}^k = \{X_{k+1} = \cdots = X_n = 0\} \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$ con $0 < k < n$.
Dimostrare che non esiste alcuna retrazione $r : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^k$ (ossia tale che $r \circ i = id_{\mathbb{RP}^k}$).

Esercizio 5.
Sia $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1,\ \mathrm{Im}(w) = 0\}$ e sia $f : X \to \mathbb{CP}^1$ la mappa $f(z, w) = [z : w]$. Calcolare $H_2(f; \mathbb{Z})$.

Esercizio 6.
Dato X uno spazio topologico, sia $SX := X \times [-1, 1]/\sim$ la *sospensione* di X (dove $(x, t) \sim (x', t')$ se e solo se $(x, t) = (x', t')$, oppure $t = t' = -1$ oppure $t = t' = 1$). Calcolare $H_\bullet(SX; \mathbb{Z})$ in funzione di $H_\bullet(X; \mathbb{Z})$.

Esercizio 7.
Sia X un complesso di celle e sia $\alpha \in H^1(X; \mathbb{Z})$.
Dimostrare che $\exists f : X \to S^1$ tale che $f^*\beta = \alpha$, dove β è il generatore standard di $H^1(S^1; \mathbb{Z})$.
Dimostrare che $f, g : X \to S^1$ sono omotope se e solo se $f^*\beta = g^*\beta \in H^1(X; \mathbb{Z})$.