Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Esercizi - Foglio 2

Esercizio 1 (transfer).
Sia $f : \tilde{X} \to X$ un rivestimento finito di grado d (fra spazi connessi per archi) e sia A un gruppo abeliano.

(a) Dimostrare che ogni mappa $\sigma : \Delta^k \to X$ ammette d sollevamenti distinti $\sigma^i : \Delta^k \to \tilde{X}$ con $i = 1, \dots, d$.

(b) Dimostrare che l'omomorfismo

$$f^! : C_\bullet(X; A) \longrightarrow C_\bullet(\tilde{X}; A)$$

definito da $f^!(\sigma) = \sigma^1 + \cdots + \sigma^d$ è un morfismo di complessi di catene (ovvero commuta con il differenziale) e che quindi induce una $f^! : H_k(X; A) \to H_k(\tilde{X}; A)$ per ogni $k \geq 0$.

(c) Dimostrare che la composizione $f_* f^! : H_\bullet(X; A) \to H_\bullet(X; A)$ è dato dalla moltiplicazione per d.

(d) Supponiamo che f sia un rivestimento regolare indotto da una suriezione $\pi_1(X) \to G$, dove G è un gruppo finito di ordine d, cosicché G agisca su $\tilde{X}$ e quindi su $C_\bullet(\tilde{X}; A)$ e su $H_\bullet(\tilde{X}; A)$.
Dimostrare che il sottogruppo $C_\bullet(\tilde{X}; A)^G \subset C_\bullet(\tilde{X}; A)$ delle catene G-invarianti di $\tilde{X}$ è un sottocomplesso e che $f^!$ identifica $C_\bullet(X; A)$ con $C_\bullet(\tilde{X}; A)^G$.

(d') Dimostrare che $f^! f_*$ agisce come la moltiplicazione per d su $H_\bullet(\tilde{X}; A)^G$. Concludere che, se d è invertibile in A, allora $H_\bullet(\tilde{X}; A)^G \cong H_\bullet(X; A)$.

Esercizio 2 (caratteristica di Eulero).
Sia X un complesso di celle finito.

(a) Dimostrare che $\chi(X) := \sum_{k \geq 0} (-1)^k h_k(X; \mathbb{K})$ coincide con $\sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k(X)$, dove $\mathbb{K}$ è un campo, $c_k(X)$ è il numero di k-celle in X e $h_k(X; \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} H_k^{sing}(X; \mathbb{K})$.

(b) *Diciamo che $A \subseteq X$ è un* **sottocomplesso cellulare** *se $A = \bigcup_{k \geq 0} A^{(k)}$, $A^{(k)} := A \cap X^{(k)}$ e $A^{(k+1)}$ si ottiene da $A^{(k)}$ attaccando un sottoinsieme J_k delle k-celle I_k di X usando le medesime mappe di attaccamento.*
Dimostrare che, se A e B sono sottocomplessi cellulari di X, allora lo è anche $A \cap B$ e inoltre $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

(c) Dimostrare che, se $X \to Y$ è un rivestimento finito di grado d, allora $\chi(X) = d \cdot \chi(Y)$.

(d) Dimostrare che, se $\chi(X) \neq 0$, esiste un numero finito di rivestimenti $X \to Y$, a meno di isomorfismo.

Esercizio 3 (successione esatta dei coefficienti).
Sia $0 \to A \to B \to C \to 0$ una successione esatta di gruppi abeliani e sia X uno spazio topologico. Dimostrare che esiste una successione esatta lunga

$$\cdots \to H_k(X;A) \to H_k(X;B) \to H_k(X;C) \to H_{k-1}(X;A) \to \cdots$$

Descrivere le mappe nel caso $X = \mathbb{RP}^n$ e $0 \longrightarrow A = \mathbb{Z} \xrightarrow{2} B = \mathbb{Z} \longrightarrow C = \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$.

Esercizio 4 (CW-complessi con omologia assegnata).
Siano $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ gruppi abeliani. Dimostrare che esiste un complesso di celle X tale che

(0) X è connesso;

(1) $H_1(X;\mathbb{Z}) \cong A_1$;

(k) $H_k(X;\mathbb{Z}) \cong A_k$ per ogni $k \geq 2$.

(Suggerimento: per ogni $k_0 \geq 1$, dimostrare prima il caso in cui $A_k = 0$ per $k \neq k_0$.)

Esercizio 5 (sfere di omologia).
Costruire una 3-varietà compatta e orientata X che abbia la stessa omologia della 3-sfera.
(Suggerimento: cercare X del tipo S^3/G, dove G è un gruppo finito.)

Esercizio 6 (spazi lente).
Siano p, q interi positivi coprimi e sia $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{p})$. Sia $G = \langle \zeta \rangle \subset U(1)$ il sottogruppo ciclico delle radici dell'unità p-esime e consideriamo $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Lo *spazio lente* $L(p,q)$ è il quoziente S^3/G, dove G agisce come $\zeta \cdot (z,w) = (\zeta z, \zeta^q w)$.

(a) Dimostrare che l'azione di G su S^3 è libera e che $D = \{(z,w) \in S^3 \mid \arg(z) \in [0, 2\pi/p]\}$ è un dominio fondamentale per l'azione di G.

(b) Calcolare $\pi_1(L(p,q))$.

(c) Sia Γ un CW-complesso di dimensione 1 omeomorfo a S^1 con 1-celle ciclicamente ordinate $\{e^1_k \,|k \in \mathbb{Z}/p\}$ e 0-celle ciclicamente $\{e^0_k \mid k \in \mathbb{Z}/p\}$. Prendiamo P_+ (risp. P_-) il cono di vertice v_+ (risp. v_-) su Γ: incollando P_+ e P_- lungo Γ otteniamo una bipiramide (cava) $S\Gamma$, omeomorfa a S^2. Incolliamo quindi una 3-cella tramite un omeomorfismo $\partial e^3 = S^2 \to S\Gamma$ e otteniamo una bipiramide piena B, con 0-celle $\{e^0_k, v_+, v_-\}$, 1-celle $\{e^1_k = [e^0_k, e^0_{k+1}], [e^0_h, v_+], [e^0_h, v_-]\}$, 2-celle $\{[e^0_k, e^0_{k+1}, v_+], [e^0_k, e^0_{k+1}, v_-]\}$ e 1 3-cella. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza che identifica le due celle

$$[e^0_k, e^0_{k+1}, v_+] \sim [e^0_{k+q+1}, e^0_{k+q}, v_-]$$

(preservando l'ordine dei vertici) per ogni $k \in \mathbb{Z}/p$.
Dimostrare che $L(p,q) \cong B/\sim$.
(Suggerimento: costruire una mappa $B \to D$ in modo che Γ sia mandato su $\{0\} \times S^1$ e in particolare $e^0_k \mapsto (0, \zeta^k)$, v_+ sia mandato su $(1,0)$, v_- sia mandato su $(\zeta, 0)$, le 2-celle adiacenti a v_+ siano mandate in $D \cap \{\arg(z) = 0\}$ e le 2-celle adiacenti a v_- siano mandate in $D \cap \{\arg(z) = 2\pi/p\}$. Controllare che le identificazioni prodotte da $\sim$ coincidano con quelle indotte dall'azione di G.)

(d) Calcolare $H_*(L(p,q);\mathbb{Z})$, $H_*(L(p,q);\mathbb{Q})$ e $H_*(L(p,q);\mathbb{Z}/p)$.