Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Esercizi - Foglio 1

Notazione: scriveremo H_k per intendere H_k^{sing} (e similmente H^k, C_k, C^k).

Esercizio 1.
Sia X uno spazio topologico e sia $\mathbb{K}$ un campo. Dimostrare che una ben definita applicazione

$$\Psi : H^k(X;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H_k(X;\mathbb{K}),\mathbb{K})\,.$$

è indotta dalla definizione stessa $C^k(X;\mathbb{K}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C_k(X;\mathbb{K}),\mathbb{K})$, e che tale Ψ è un isomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

Esercizio 2.
Dimostrare che, se $f \simeq g : (X,A) \to (Y,B)$, allora

$$f_* = g_* : H_k(X,A;G) \to H_k(Y,B;G)$$

per ogni $k \geq 0$ e ogni gruppo abeliano G.

Esercizio 3.
Siano $B \subset A \subset X$ inclusioni di spazi topologici. Dimostrare che esiste una successione esatta lunga

$$\cdots \to H_k(A,B;G) \to H_k(X,B;G) \to H_k(X,A;G) \to H_{k-1}(A,B;G) \to \cdots$$

Esercizio 4.
Sia $\gamma : S^1 \to \mathbb{RP}^2$ un'embedding e supponiamo che $[\gamma]$ generi $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$. Sia $C = \gamma(S^1)$.
Calcolare $H_\bullet(\mathbb{RP}^2, C;\mathbb{Z})$.

Esercizio 5.
Siano X e Y varietà topologiche di dimensioni rispettive m e n.
Dimostrare che, se X e Y sono omeomorfe, allora $m = n$.

Esercizio 6.
Siano X, Y varietà topologiche di dimensione $n \geq 1$ e siano $D \subset X$ e $\Delta \subset Y$ aperti tali che $\overline{D}$ e $\overline{\Delta}$ sono omeomorfi a D^n. Siano inoltre $p \in D$, $q \in \Delta$ e $\varphi : D \setminus \{p\} \to \Delta \setminus \{q\}$ un omeomorfismo.
Chiamiamo $X \#_\varphi Y$ (*somma connessa*) lo spazio topologico ottenuto quozientando $(X \setminus \{p\}) \coprod (Y \setminus \{q\})$ per la relazione di equivalenza $z \sim z'$ se e solo se $z = z'$ oppure $z \in D \setminus \{p\}$, $z' \in \Delta \setminus \{q\}$ e $\varphi(z) = z'$.

(a) Dimostrare che l'inclusione $X \setminus D \hookrightarrow X$ induce isomorfismi $H_k(X - D;G) \to H_k(X;G)$ per ogni $k \in [0, n-2]$. (Stesso risultato per Y, Δ, q.)

(b) Dimostrare che $H_k(X \#_\varphi Y;G) \cong H_k(X;G) \oplus H_k(Y;G)$ per ogni $k \in [1, n-2]$.