# Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Soluzioni della prova scritta del 27/1/2015

**Esercizio 1.**

*Sia $X$ lo spazio topologico ottenuto quozientando $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ per la relazione $\sim$ che identifica $(z, w)$ con $(\lambda z, \lambda^3 w)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

*(a) Munire $X$ di una struttura di CW complesso.*

*(b) Calcolare i gruppi di omologia intera $H_k(X; \mathbb{Z})$ per $k \in \mathbb{N}$.*

**Soluzione dell'esercizio 1.**

(a) Poniamo $\widetilde{Z} := \{(0, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$ e $\widetilde{Y} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \mid z \neq 0\}$ e denotiamo con $Z := \widetilde{Z}/\sim$ e $Y := \widetilde{Y}/\sim$. Chiaramente $Z \cap Y = \emptyset$ e $X = Z \cup Y$. Inoltre, $Z$ consiste del solo punto $[(0, 1)]$, mentre la mappa $\mathbb{C} \ni t \mapsto [(1, t)] \in Y$ è un omeomorfismo con inversa $Y \ni [(z, w)] \mapsto w/z^3 \in \mathbb{C}$. Dunque $X$ ha una struttura cellulare in cui $Z$ sia l'unica 0-cella e $Y$ l'unica 2-cella.

(b) Dalla descrizione della struttura cellulare, è chiaro che i bordi cellulari sono nulli e quindi $H_0(X; \mathbb{Z}) \cong H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e $H_k(X; \mathbb{Z}) = 0$ per $k \neq 0, 2$.

**Esercizio 2.**

*(a) Determinare quali dei seguenti spazi siano omotopicamente equivalenti.*

$$\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2, \qquad \mathbb{RP}^2 \vee S^3, \qquad \mathbb{C}^* \times \mathbb{RP}^2, \qquad \mathbb{RP}^3$$

*(b) Per ciascuno spazio $X$ fra quelli elencati sopra, determinare se $A = H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ possa essere la $\mathbb{Z}/2$-algebra graduata di coomologia di una qualche varietà compatta.*

**Soluzione dell'esercizio 2.**

(a) Chiaramente $\mathbb{C}^* \cong S^1 \times \mathbb{R}_+ \simeq S^1 \cong \mathbb{RP}^1$. Dunque $\mathbb{C}^* \times \mathbb{RP}^2 \simeq \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2$.

Inoltre, $H_1(\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, mentre $H_1(\mathbb{RP}^3; \mathbb{R}) = H_1(\mathbb{RP}^2 \vee S^3; \mathbb{R})$. Dunque $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2$ non è omotopicamente equivalente né a $\mathbb{RP}^3$ né a $\mathbb{RP}^2 \vee S^3$.

Infine, $H^*(\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[\alpha, \beta]/(\alpha^3, \beta^2, \alpha\beta)$ con $deg(\alpha) = 1$ e $deg(\beta) = 3$; mentre $H^*(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[\gamma]/(\gamma^4)$ con $deg(\gamma) = 1$. Se $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2$ fosse omotopicamente equivalente a $\mathbb{RP}^3$, allora le $\mathbb{Z}/2$-algebre graduate di coomologia sarebbero isomorfe. Tale isomorfismo manderebbe $\gamma$ in $\alpha$, il che contraddice il fatto che $\alpha^3 = 0$ mentre $\gamma^3 \neq 0$.

(b) Gli spazi $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2$ e $\mathbb{RP}^3$ sono già varietà compatte e dunque la risposta è affermativa. Lo è anche per $\mathbb{C}^* \times \mathbb{RP}^2$, che è omotopicamente equivalente a $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2$.

Supponiamo $A^* = H^*(\mathbb{RP}^2 \vee S^3; \mathbb{Z}/2)$ fosse la $\mathbb{Z}/2$-algebra graduata di coomologia di una varietà compatta $Y$. Poiché $A^i \cong \mathbb{Z}/2$ per $i = 0, 1, 2, 3$ e $A^j = 0$ per $j \neq 0, 1, 2, 3$, ne deduciamo che $Y$ dovrebbe essere connessa di dimensione 3 e che il cup product induca un accoppiamento non degenere $b : A^1 \otimes A^2 \to A^3 \cong \mathbb{Z}/2$. Tuttavia, da quanto visto sopra, $A^1 \cong \mathbb{Z}/2 \cdot \alpha$ e $A^2 \cong \mathbb{Z}/2 \cdot \alpha^2$. Dunque $b(\alpha, \alpha^2) = \alpha^3 = 0$ e l'accoppiamento $b$ è nullo. Tale contraddizione porta a concludere che la risposta per $\mathbb{RP}^2 \vee S^3$ sia negativa.

**Esercizio 3.**

*Sia $M$ una 4-varietà connessa, orientata e compatta.*
*Supponiamo che $M$ sia un prodotto non banale di varietà $M = S \times T$.*

*(a) Dimostrare che $S$ e $T$ sono entrambe orientabili e connesse.*

*(b) Calcolare la segnatura del cup product su $H^2(M;\mathbb{R})$.*

**Soluzione dell'esercizio 3.**

(a) Sia $s = \dim(S)$ e $t = \dim(T)$. Le proiezioni $S\times T \to T$ e $S\times T \to S$ sono ovviamente continue. Dunque $S$ e $T$ sono connesse (per archi) e compatte, perché lo è $S\times T$. Inoltre, $H_4(S\times T;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ perché $S \times T$ è compatta, orientata e connessa. Ma $H_4(S \times T;\mathbb{R}) \cong H_s(S;\mathbb{R}) \cong H_t(T;\mathbb{R})$ per Künneth. Dunque $H_s(S;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ e $H_t(T;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, da cui concludiamo che $S$ e $T$ sono anch'esse orientabili.

(b) Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $s \leq t$. Trascurando il caso banale in cui $S$ si riduca ad un solo punto, abbiamo i due casi $s = 1$ e $s = 2$.

Se $s = 1$, allora $S \cong S^1$. Dunque $S \times T \cong S^1 \times T = \partial(D^2 \times T)$, in quanto $S^1 = \partial D^2$.

Se $s = 2$, allora $S \cong \Sigma_g$ è una superficie compatta orientabile connessa di genere $g$. Tale superficie è il bordo di una 3-varietà $W_g$ compatta orientabile e connessa (il "toro pieno con $g$ buchi"). Dunque $S \times T \cong \Sigma_g \times T \cong \partial(W_g \times T)$.

In entrambi i casi, $S \times T$ è il bordo di una 5-varietà compatta orientata connessa. Per quanto visto a lezione, la sua segnatura è 0.

**Esercizio 4.**

*Sia $\mathbb{T}$ il toro bidimensionale $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Denotiamo con $\mathcal{G}$ il gruppo degli omeomorfismi del toro $\mathbb{T}$ in sé e con $G$ il gruppo degli automorfismi del gruppo abeliano $H_1(\mathbb{T};\mathbb{Z})$.*

*(a) Dimostrare che $G$ è isomorfo a $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$.*

*(b) Dimostrare che esiste un omomorfismo di gruppi suriettivo $\mathcal{G} \twoheadrightarrow G$.*

**Soluzione dell'esercizio 4.**

(a) Il gruppo $H_1(\mathbb{T};\mathbb{Z})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Gli automorfismi di $\mathbb{Z}^2$ sono dunque mappe $\mathbb{Z}$-lineari $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ e invertibili, e dunque $G \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$.

(b) Per ogni $v \in \mathbb{Z}^2$, sia $\widetilde{\gamma}_v$ il segmento che unisce l'origine di $\mathbb{R}^2$ con $v$. Se $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è la proiezione naturale, sia $\gamma_v$ l'immagine di $\widetilde{\gamma}_v$ tramite $p$. Denotiamo con $e$ la classe $[0] \in \mathbb{T}$.

Poiché $p$ è un rivestimento universale e $\mathbb{Z}^2 = p^{-1}(e)$, ne segue che la mappa $\Pi : \mathbb{Z}^2 \to \pi_1(\mathbb{T},[0]) \cong H_1(\mathbb{T};\mathbb{Z})$ definita come $v \mapsto [\gamma_v]$ è un isomorfismo.

Consideriamo ora l'applicazione $\Gamma : \mathcal{G} \to G$ definita come $f \mapsto H_1(f;\mathbb{Z})$. Per la funtorialità di $H_1(\cdot;\mathbb{Z})$, la mappa $\Gamma$ è un omomorfismo. Per dimostrare che $\Gamma$ è suriettiva, sia $\varphi : H_1(\mathbb{T};\mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{T};\mathbb{Z})$ un elemento di $G$ e consideriamo $f := \Pi^{-1} \circ \varphi \circ \Pi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$. Chiaramente $f$ è un omomorfismo invertibile. Denotiamo con $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali definito come $f_{\mathbb{R}} := f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ su $\mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$. Poiché $f_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$, esso induce un omeomorfismo $\overline{f}_{\mathbb{R}} : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, ovvero $\overline{f}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{G}$.

Osserviamo infine che $\overline{f}_{\mathbb{R},*}([\gamma_v]) = p \circ f_{\mathbb{R}} \cong \widetilde{\gamma}_v = p \circ \widetilde{\gamma}_{f(v)} = [\gamma_{f(v)}]$ e dunque $\Gamma(\overline{f}_{\mathbb{R}}) = \varphi$, da cui la suriettività di $\Gamma$.