Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Soluzioni della prova scritta del 18/2/2015

Esercizio 1.

Sia M una varietà di dimensione m e sia $i : Z \hookrightarrow M$ l'inclusione di una sottovarietà di dimensione k.

(a) Supponiamo che M sia compatta. Dimostrare che $i_* : H_d(M \setminus Z; \mathbb{Z}) \to H_d(M; \mathbb{Z})$ è un isomorfismo per $d < n - k - 1$ ed è iniettiva per $d = n - k - 1$.

(b) Cosa si può dire se M non è compatta?

Soluzione dell'esercizio 1.

(a) Consideriamo la successione della coppia $(M \setminus Z, M)$:

$$\to H_{d-1}(M, M \setminus Z; \mathbb{Z}) \to H_d(M \setminus Z; \mathbb{Z}) \to H_d(M; \mathbb{Z}) \to H_d(M, M \setminus Z; \mathbb{Z}) \to$$

È sufficiente dimostrare che $H_m(M, M \setminus Z; \mathbb{Z}) = 0$ per $m < n - k$.

Sia W un intorno tubolare di Z in M. Per escissione otteniamo $H_m(M, M \setminus Z; \mathbb{Z}) \cong H_m(W, W \setminus Z; \mathbb{Z})$ e per isomorfismo di Thom $H_m(W, W \setminus Z; \mathbb{Z}) \cong H_{m-(n-k)}(Z; \mathbb{Z})$, che si annulla se $m < n - k$.

(b) Funziona tutto allo stesso modo: l'isomorfismo di Thom non richiede che Z sia compatta.

Esercizio 2. *Sia M una varietà connessa compatta orientata di dimensione n e sia Z una sottovarietà chiusa e connessa di dimensione 1. Sia X lo spazio ottenuto da M identificando Z ad un punto.*

(a) Supponiamo $n = 2$. Calcolare la $\mathbb{Q}$-algebra di coomologia $H^*(X; \mathbb{Q})$.

(b) Supponiamo $n = 5$. Dire se il cup product su $H^*(X; \mathbb{Q})$ definisce un accoppiamento non degenere.

Soluzione dell'esercizio 2.

Consideriamo tutti i gruppi di coomologia a coefficienti in $\mathbb{Q}$.
Chiaramente X ha le stesse componenti connesse di M e dunque $H^0(X) \cong \mathbb{Q}$. Per $k \geq 1$ abbiamo $H^k(X) \cong H^k(M, Z)$ e dunque la successione esatta lunga

$$0 \to H^1(X) \to H^1(M) \xrightarrow{i^*} H^1(Z) \cong \mathbb{Q} \to H^2(X) \to H^2(M) \to H^2(Z) = 0$$

dato che $H^0(M) \to H^0(Z)$ è un isomorfismo e dunque suriettiva. La mappa i^* è duale di $i_* : H_1(Z) \to H_1(M)$ e dunque è non nulla se e solo se $0 \neq i_*\mu_Z \in H_1(M)$.
Se $i_*\mu_Z \neq 0$, allora $h^1(X) = h^1(M) - 1$ e $h^2(X) = h^2(M)$. Se $i_*\mu_Z = 0$, allora $h^1(X) = h^1(M)$ e $h^2(X) = h^2(M) + 1$. Poiché $H^k(Z) = 0$ per $k > 1$, otteniamo $h^k(X) = h^k(M)$ per $k > 2$.

(a) Supponiamo $i_*\mu_Z = 0$. Allora M è omeomorfo bouquet di due superfici Σ e Σ'. In tal caso $H^*(M) \cong H^*(\Sigma) \times H^*(\Sigma')/(1 - 1')$, dove $1 \in H^*(\Sigma)$ e $1' \in H^*(\Sigma')$ sono le unità.

Supponiamo ora $i_*\mu_Z \neq 0$. Dalla successione esatta vista in alto, otteniamo che $H^*(X) = \mathrm{Ann}(i_*\mu_Z) \subset H^*(M)$, ossia il sottoanello degli elementi di $H^*(M)$ il cui cap con $i_*\mu_Z$ è nullo.

(b) Affinché ci sia un accoppiamento perfetto, è necessario che $h^1(X) = h^4(X)$ e $h^2(X) = h^3(X)$. Ora, $h^4(X) = h^4(M)$ e $h^3(X) = h^3(M)$. Tuttavia: se $i_*\mu_Z = 0$, allora $h^2(X) \neq h^2(M) = h^3(X)$; se $i_*\mu_Z \neq 0$, allora $h^1(X) \neq h^1(M) = h^4(X)$. Dunque l'accoppiamento non è mai perfetto.

Esercizio 3.

Sia $f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ un'applicazione continua e sia $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathbb{CP}^n$ l'insieme dei punti fissi di f.

(a) Per quali $n \geq 1$ esiste f tale che $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ sia costituito da punti isolati?

(b) Per quali $n \geq 1$ esiste f tale che $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$?

Soluzione dell'esercizio 3.

(a) Per ogni $n \geq 1$. Infatti, sia $d > 1$ intero. L'applicazione $m_d : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ definita come $m_d([Z_0 : \cdots : Z_n]) = [Z_0^d : \cdots : Z_n^d]$ ha $\frac{d^{n+1}-1}{d-1}$ punti fissi, che sono quindi isolati.

(b) Sia H un generatore di $H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$. Può aversi $f^*H = H$ oppure $f^*H = -H$. Nel primo caso avremmo $L(f) = n + 1$, nel secondo caso avremmo $L(f) = 1$ se n è pari e $L(f) = 0$ se n è dispari.

Dunque, se n è pari, non esiste una tale f senza punti fissi. Se invece $n = 2k + 1$ è dispari, una tale f esiste: per esempio $f([Z_0 : \cdots : Z_{2k+1}]) = [\overline{Z}_1 : -\overline{Z}_0 : \overline{Z}_3 : -\overline{Z}_2 : \cdots : \overline{Z}_{2k+1} : -\overline{Z}_{2k}]$. È facile verificare che una tale f è ben definita e non ha punti fissi.

Esercizio 4.

Sia $V_2(\mathbb{R}^4) \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ lo spazio delle coppie (v_1, v_2) di vettori unitari e ortogonali di $\mathbb{R}^4$. Notare che la mappa $(v_1, v_2) \mapsto v_1$ che dimentica il secondo vettore definisce un'applicazione $\pi : V_2(\mathbb{R}^4) \to S^3$.

(a) Decomporre $V_2(\mathbb{R}^4)$ in celle.

(b) Calcolare la caratteristica di Eulero $\chi(V_2(\mathbb{R}^4))$.

(c) Calcolare i gruppi di omologia $H_*(V_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z})$.

Soluzione dell'esercizio 4.

(a) Si può verificare che la mappa π è una fibrazione con fibra S^2. Per $n = 2, 3$, diamo a S^n la struttura una celle $S^n = e^0 \cup e^n$. Dunque, $V_2(\mathbb{R}^4)$ avrà una struttura in celle del tipo $\tilde{e}^0 \cup \tilde{e}^2 \cup \tilde{e}^3 \cup \tilde{e}^5$.

(b) Chiaramente $\chi(V_2(\mathbb{R}^4)) = \chi(S^2)\chi(S^3) = 2 \cdot 0 = 0$.

(c) Sia $C_*^{cell}(V_2(\mathbb{R}^4)) \cong C_*^{cell}(S^3; \mathbb{Z}) \otimes C_*^{cell}(S^2; \mathbb{Z})$. L'unico differenziale potenzialmente non banale è d_3. Vogliamo dimostrare che $d_3 = 0$ e dunque $H_*(V_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z}) \cong H_*(S^3; \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^2; \mathbb{Z})$. A tal fine è sufficiente dimostrare che $H_3(V_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z})$ non è un gruppo finito.

Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^2$ nel modo standard, in modo che $\mathrm{SU}(2)$ agisca su $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ tramite isometrie lineari.

Fissiamo $v_0 \in S^3$. Allora la mappa $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to S^3$ definita da $\Phi(g) = g \cdot v_0$ è un omeomorfismo. Fissiamo ora $w_0 \in S^3$ ortogonale a v_0. Allora $\widetilde{\Phi} : \mathrm{SU}(2) \to V_2(\mathbb{R}^4)$ definita da $\widetilde{\Phi}(g) = (g \cdot v_0, g \cdot w_0)$ è un sollevamento di Φ

$$\begin{tikzcd} & V_2(\mathbb{R}^4) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{SU}(2) \arrow[ur, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[r, "\cong", "\Phi"'] & S^3 \end{tikzcd}$$

e dunque una sezione di π. Ne segue che $H_*(S^3; \mathbb{Z})$ è un addendo diretto di $H_*(V_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z})$ e in particolare $H_3(V_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z})$ contiene una copia di $\mathbb{Z}$.