Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Prova scritta del 27/1/2015

Esercizio 1.

Sia X lo spazio topologico ottenuto quozientando $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ per la relazione $\sim$ che identifica (z, w) con $(\lambda z, \lambda^3 w)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

(a) Munire X di una struttura di CW complesso.

(b) Calcolare i gruppi di omologia intera $H_k(X; \mathbb{Z})$ per $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.

(a) Determinare quali dei seguenti spazi siano omotopicamente equivalenti.

$$\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^2, \qquad \mathbb{RP}^2 \vee S^3, \qquad \mathbb{C}^* \times \mathbb{RP}^2, \qquad \mathbb{RP}^3$$

(b) Per ciascuno spazio X fra quelli elencati sopra, determinare se $A = H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ possa essere la $\mathbb{Z}/2$-algebra graduata di coomologia di una qualche varietà compatta.

Esercizio 3.

Sia M una 4-varietà connessa, orientata e compatta.
Supponiamo che M sia un prodotto non banale di varietà $M = S \times T$.

(a) Dimostrare che S e T sono entrambe orientabili e connesse.

(b) Calcolare la segnatura del cup product su $H^2(M; \mathbb{R})$.

Esercizio 4.

Sia $\mathbb{T}$ il toro bidimensionale $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Denotiamo con $\mathcal{G}$ il gruppo degli omeomorfismi del toro $\mathbb{T}$ in sé e con G il gruppo degli automorfismi del gruppo abeliano $H_1(\mathbb{T}; \mathbb{Z})$.

(a) Dimostrare che G è isomorfo a $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$.

(b) Dimostrare che esiste un omomorfismo di gruppi suriettivo $\mathcal{G} \twoheadrightarrow G$.