Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Prova scritta del 24/6/2015

Esercizio 1.

Sia S una superficie orientata e compatta di genere $g \geq 2$ e sia $r : \tilde{S} \to S$ un rivestimento doppio (non ramificato), con $\tilde{S}$ connessa. Denotiamo con σ l'automorfismo non banale di $\tilde{S}$ tale che $r \circ \sigma = r$.

(a) Determinare il genere $\tilde{g}$ di $\tilde{S}$.

(b) Dimostrare che l'immagine dell'omomorfismo $r_* : H_1(\tilde{S}; \mathbb{Z}) \to H_1(S; \mathbb{Z})$ è un sottogruppo di indice 2.

(c) Sia $H^1(\tilde{S}; \mathbb{R})^-$ il sottospazio di $H^1(\tilde{S}; \mathbb{R})$ sul quale σ agisce come (-1). Dimostrare che il cup product su $H^1(\tilde{S}; \mathbb{R})$ si restringe ad un accoppiamento non degenere su $H^1(\tilde{S}; \mathbb{R})^-$.

Esercizio 2. Sia M una varietà compatta, connessa, orientata e senza bordo, di dimensione n, e sia $f : M \to S^1$ un'applicazione liscia e sommersiva. Sia $F := f^{-1}(1)$ e sia $\iota : F \hookrightarrow M$ l'inclusione naturale.

(a) Dimostrare che F è una varietà liscia e orientabile, di dimensione $n - 1$.

(b) Dimostrare che esiste un omeomorfismo $h : F \to F$ ed una successione esatta lunga

$$\ldots \to H^{k-1}(F; \mathbb{R}) \xrightarrow{\iota_!} H^k(M; \mathbb{R}) \xrightarrow{\iota^*} H^k(F; \mathbb{R}) \xrightarrow{\rho} H^k(F; \mathbb{R}) \xrightarrow{\iota_!} H^{k+1}(M; \mathbb{R}) \to \ldots$$

dove $\rho = I - h^*$.

(c) Supponiamo $n = 3$ e supponiamo che F sia una superficie connessa di genere g. Calcolare i possibili valori di $\dim_{\mathbb{R}} H^2(M; \mathbb{R})$.

(d) Supponiamo $n = 4$. Dimostrare che l'immagine di $\iota_! : H^1(F; \mathbb{R}) \to H^2(M; \mathbb{R})$ è isotropa per il cup product. Calcolare la segnatura di M.

Esercizio 3.

Sia G un gruppo finito, EG un CW-complesso contraibile su cui G agisce in modo libero e propriamente discontinuo e sia $\pi : EG \to BG := EG/G$ la proiezione sul quoziente.

(a) Dimostrare che $H^0(BG; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ e $H^k(BG; \mathbb{Q}) = 0$ per $k > 0$.

(b) Dimostrare che, se $G \neq \{e\}$, il CW-complesso EG è ottenuto incollando infinite celle.

Esercizio 4.

Sia $\iota : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$ l'inclusione naturale.

(a) Calcolare $\iota_* : H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}/2)$.

(b) Calcolare i gruppi di coomologia $H^*(\mathbb{CP}^2, \mathbb{RP}^2; \mathbb{Z})$ e $H^*(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{RP}^2; \mathbb{Z})$.