Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Prova scritta del 18/2/2015

Esercizio 1.

Sia M una varietà di dimensione m e sia $i : Z \hookrightarrow M$ l'inclusione di una sottovarietà di dimensione k.

(a) Supponiamo che M sia compatta. Dimostrare che $i_* : H_d(M \setminus Z; \mathbb{Z}) \to H_d(M; \mathbb{Z})$ è un isomorfismo per $d < n - k - 1$ ed è iniettiva per $d = n - k - 1$.

(b) Cosa si può dire se M non è compatta?

Esercizio 2.

Sia M una varietà compatta orientata di dimensione n e sia Z una sottovarietà chiusa e connessa di dimensione 1. Sia X lo spazio ottenuto da M identificando Z ad un punto.

(a) Supponiamo $n = 2$. Calcolare la $\mathbb{Q}$-algebra di coomologia $H^*(X; \mathbb{Q})$.

(b) Supponiamo $n = 5$. Dire se il cup product su $H^*(X; \mathbb{Q})$ definisce un accoppiamento non degenere.

Esercizio 3.

Sia $f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ un'applicazione continua e sia $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathbb{CP}^n$ l'insieme dei punti fissi di f.

(a) Per quali $n \geq 1$ esiste f tale che $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ sia costituito da punti isolati?

(b) Per quali $n \geq 1$ esiste f tale che $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$?

Esercizio 4.

Sia $V_2(\mathbb{R}^4) \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ lo spazio delle coppie (v_1, v_2) di vettori unitari e ortogonali di $\mathbb{R}^4$. Notare che la mappa $(v_1, v_2) \mapsto v_1$ che dimentica il secondo vettore definisce un'applicazione $\pi : V_2(\mathbb{R}^4) \to S^3$.

(a) Decomporre $V_2(\mathbb{R}^4)$ in celle.

(b) Calcolare la caratteristica di Eulero $\chi(V_2(\mathbb{R}^4))$.

(c) Calcolare i gruppi di omologia $H_*(V_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z})$.