Topologia algebrica

Anno 2014/2015

Prova scritta del 14/7/2015

Esercizio 1.

Sia S una superficie connessa, orientata e compatta di genere $g \geq 2$, sia p un punto di S e $m \geq 2$ un intero. Sia $r : \tilde{S} \to S$ il rivestimento connesso (non ramificato) corrispondente al nucleo dell'omomorfismo $\varphi : \pi_1(S, p) \to H_1(S; \mathbb{Z}/m)$ ottenuto componendo l'omomorfismo di Hurewicz con la riduzione modulo m.

(a) Determinare il grado del rivestimento r e il genere di $\tilde{S}$.

(b) Calcolare che l'indice del sottogruppo immagine dell'omomorfismo $r_* : H_1(\tilde{S}; \mathbb{Z}) \to H_1(S; \mathbb{Z})$.

(c) Dire se l'omomorfismo $r^* : H^1(S; \mathbb{Z}) \to H^1(\tilde{S}; \mathbb{Z})$ sia iniettivo e se sia suriettivo.

Esercizio 2. Considerare i CW complessi seguenti

$$M_1 = S^1 \vee S^1 \vee S^2, \qquad M_2 = S^1 \times S^1, \qquad M_3 = \mathbb{RP}^2 \vee S^1 .$$

(a) Determinare per quali $i \neq j$ esista un'equivalenza omotopica tra M_i e M_j.

(b) Determinare per quali $i \neq j$ esista un'applicazione continua $f : M_i \to M_j$ che induca un omomorfismo suriettivo $f_* : H_1(M_i; \mathbb{Z}) \to H_1(M_j; \mathbb{Z})$.

Esercizio 3.

Sia M una varietà compatta, connessa, di dimensione k con $0 < k < 4$ e denotiamo con $\mu_M \in H_k(M; \mathbb{Z}/2)$ il suo ciclo fondamentale a coefficienti in $\mathbb{Z}/2$.
Sia inoltre $f : M \to \mathbb{RP}^4$ un'applicazione continua.

(a) Supponendo M orientabile, determinare i possibili valori di $f_*\mu_M \in H_k(\mathbb{RP}^4; \mathbb{Z}/2)$.

(b) Supponendo M non orientabile, determinare i possibili valori di $f_*\mu_M \in H_k(\mathbb{RP}^4; \mathbb{Z}/2)$.

Esercizio 4.

Sia $n \geq 2$ un intero e sia $M \subset S^n$ una sottovarietà compatta e connessa di dimensione $n - 1$.

(a) Dimostrare che M è orientabile.

(b) Dimostrare che $S^n \setminus M$ consiste esattamente di due componenti connesse.

(c) Dire se esistano un intero $n \geq 2$ e una varietà compatta, connessa e orientabile N di dimensione n contenente una sottovarietà $M \subset N$ compatta, connessa e non orientabile di dimensione $n-1$.