1 Esercizi di Topologia, 20 aprile 2006, M.M.

Esercizio 1. Siano X uno spazio topologico e $A, B \subset X$ due sottoinsiemi non vuoti tali che $A \cup B = X$ e $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Dimostrare che X non è connesso. △

Esercizio 2. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto tale che per ogni $x \in X$ ed ogni $r > 0$ vale

$$\overline{\{y \mid d(x, y) < r\}} = \{y \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Dimostrare che X è connesso. (Sugg.: se $X = C \cup D$, con C, D chiusi non vuoti e disgiunti, si consideri $r = \min\{d(x, y) \mid (x, y) \in C \times D\}$.) △

Esercizio 3. Sia $p\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Diremo che un'applicazione $s\colon Y \to X$ è una **sezione** di p se $p(s(y)) = y$ per ogni $y \in Y$. Dimostrare che:

1. Se p possiede una sezione continua, allora p è una identificazione.
2. Se p possiede una sezione continua e X è di Hausdorff, allora s è un'applicazione chiusa. (Sugg.: basta dimostrare che $s(Y)$ è chiuso in X; considerare l'applicazione $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, sp(x))$.)

△

Esercizio 4. Siano $s < n$ due interi positivi e denotiamo con $X \subset M(n, s, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di rango s.

1. Dimostrare che X è un sottoinsieme aperto.
2. Dimostrare che X è connesso. (Sugg.: ogni matrice di X si può completare ad una matrice $n \times n$ a determinante positivo).

△

Esercizio 5 ($*$). Ricordiamo che la Grassmanniana degli s-piani in $\mathbb{R}^n$ è l'insieme

$$G(s, n) = \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V \text{ sottospazio vettoriale di dimensione } s\}.$$

Se $X \subset M(n, s, \mathbb{R})$ denota l'insieme delle matrici di rango s, esiste un'applicazione surgettiva

$$p\colon X \to G(s, n), \qquad A \mapsto \text{sottospazio generato dai vettori colonna di } A.$$

Poniamo su $G(s, n)$ la topologia quoziente, ossia la topologia che rende p una identificazione.

1. Dimostrare che p è un'applicazione aperta (Sugg.: considerare il quoziente di X per l'azione di $\mathrm{GL}(s, \mathbb{R})$ data dalla moltiplicazione a destra e mostrare che tale quoziente è omeomorfo alla Grassmanniana.)
2. Consideriamo l'azione di $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ su X data dalla moltiplicazione a sinistra e sia $O \subset X$ un'orbita di tale azione. Dimostrare che la restrizione $p\colon O \to G(s, n)$ è surgettiva e dedurre che la Grassmanniana è compatta.
3. Sia $N = \binom{n}{s}$ e consideriamo l'applicazione $f\colon X \to (\mathbb{R}^N - \{0\})$ che ad ogni matrice A associa il vettore che ha come coordinate i determinanti minori di ordine s di A. Dimostrare che f si fattorizza ad una immersione chiusa $G(s, n) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^N)$.

△