

1 Esercizi di Topologia, 9 marzo 2006

Esercizio 1. Sia (X, \leq) un insieme ordinato. Dimostrare che X possiede elementi massimali se e solo se non esistono applicazioni $f: X \rightarrow X$ tali che $f(x) > x$ per ogni x .

Nota: per una delle due implicazioni è necessario l'assioma della scelta. \triangle

Esercizio 2. Sia X un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V che contiene il vettore nullo e sia S la famiglia dei sottospazi vettoriali di V che sono contenuti in X . Dimostrare che S , con l'ordinamento dato dall'inclusione, possiede elementi massimali. \triangle

Esercizio 3. Sia X un insieme e sia data una famiglia \mathcal{A} di sottoinsiemi di X con la proprietà che $Y \in \mathcal{A}$ se e solo se ogni sottoinsieme finito di Y appartiene ad \mathcal{A} . Mostrare che \mathcal{A} possiede elementi massimali rispetto all'inclusione. \triangle

Esercizio 4 (*). Sia $X \subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che esiste un sottoinsieme $S \subset X$ con le seguenti proprietà:

1. $\|s_1 - s_2\| \geq 1$ per ogni $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$.
2. Per ogni $x \in X$ esiste $s \in S$ tale che $\|x - s\| < 1$.

\triangle

Esercizio 5 (*). Il signor B. sta leggendo un libro di fantascienza. Vi si narrano le avventure del dottor Zorn, assessore alla mobilità di un universo parallelo, un universo che contiene infiniti pianeti abitati e collegati tra loro con un efficiente sistema di navette spaziali. Ogni navetta percorre, sia in andata che in ritorno, una rotta ben definita che unisce direttamente due pianeti. Tale sistema permette di spostarsi da un qualsiasi pianeta ad un altro con un numero finito di viaggi interplanetari ed un numero finito di scali intermedi.

La missione del dottor Zorn è quella di cancellare alcune rotte in modo tale che, per ogni coppia di pianeti, esista un unico modo di spostarsi dall'uno all'altro senza prendere più di una volta la stessa navetta.

Cribbio! - esclama il signor B. - se i pianeti fossero in numero finito, saprei ben io come fare, ma così più ci penso e più mi frigge il cervello.

Nonostante tutto, il dottor Zorn riesce a portare a termine la missione. Secondo voi, come ha fatto? \triangle