1 Esercizi di Topologia, 29 ottobre 2004, M.M.

Esercizio 1. Sia $S \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme finito. Dimostrare che il complementare $\mathbb{R}^2 - S$ è connesso per archi. $\triangle$

Esercizio 2. Sia $S \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme numerabile. Dimostrare che il complementare $X = \mathbb{R}^2 - S$ è connesso per archi. (Sugg.: provare che per ogni $x \in X$ esistono almeno due rette passanti per x e contenute in X.) $\triangle$

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice **localmente costante** se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$.
Provare che se X è connesso e $f\colon X \to \mathbb{R}$ è localmente costante, allora f è costante. (Sugg.: sia $x \in X$ e provare che $f^{-1}(f(x))$ è aperto e chiuso.) $\triangle$

Esercizio 4. Dimostrare che i quattro sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

1. Una circonferenza.
2. Unione di due circonferenze disgiunte.
3. Unione di due circonferenze tangenti.
4. Unione di due circonferenze secanti.

hanno classi di omeomorfismo distinte. $\triangle$

Esercizio 5 (∗). Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme connesso per archi e denotiamo con $B \subset \mathbb{R}^2$ l'unione di tutti i segmenti con estremi in A. Dimostrare che B è convesso. $\triangle$

Esercizio 6 (∗). Sia $X = \mathbb{Q}^n \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^n \subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che X è connesso. $\triangle$