Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2004/2005

Topologia

Esercizi del 12 novembre 2004

(Prof. Marco Manetti)

Esercizio 1. Determinare il numero di componenti connesse dello spazio

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 \neq y^2\}.$$

(Sugg.: considerare l'intersezione del complementare di Y con le rette affini di $\mathbb{C}^2$.) △

Esercizio 2. Siano X, Y due spazi topologici. Mostrare che se né X né Y hanno la topologia indiscreta, allora esiste un aperto del prodotto $X \times Y$ che non è della forma $A \times B$, con $A \subset X$ e $B \subset Y$. △

Esercizio 3. Calcolare la cardinalità della famiglia dei chiusi di $\mathbb{R}^n$ nella topologia euclidea (ricordarsi che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio a base numerabile). △

Esercizio 4. Sia X il quoziente dello spazio delle matrici reali 2×2 per la relazione di coniugio. Dire, motivando la risposta, se la topologia quoziente su X è di Hausdorff. △

Esercizio 5. Sia $\mathcal{S}$ la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base di aperti la famiglia di tutti gli intervalli del tipo $[a, b[$.

Provare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni applicazione continua $X \to (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ è costante. △

Esercizio 6. Sia $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il gruppo di omeomorfismi di $\mathbb{C}$ in sé generato dalla moltiplicazione per -1. Dimostrare che il quoziente $\mathbb{C}/G$ è omeomorfo a $\mathbb{C}$. △

Esercizio 7. Sia $X \subset M(n, n, \mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche $n \times n$ e denotiamo con $U \subset X$ l'insieme delle matrici definite positive. Dimostrare che U è aperto. △

Esercizio 8. Sia X uno spazio compatto di Hausdorff.

1. Dimostrare che per ogni coppia di chiusi disgiunti $A, B \subset X$ esistono due chiusi C, D tali che $C \cup D = X$, $C \cap A = \emptyset$ e $D \cap B = \emptyset$ (Sugg.: teorema di Wallace).

2. Sia $C_0 \supset C_1 \supset \cdots C_n \supset \cdots$ una catena discendente di chiusi connessi in X. Dimostrare che $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n$ è un sottospazio connesso.

△