

## SPE 2009: DISPENSE ED ESERCIZI

MARCO MANETTI

SOMMARIO. Queste sono dispense per il corso di eccellenza 2009, Sapienza Università di Roma, dove il lettore, se lo vorrà, potrà trovare una dimostrazione della formula di Stirling, della formula di Baker-Campbell-Hausdorff, alcune proprietà delle serie di potenze, dei numeri di Stirling, Fibonacci, Bernoulli ed altre interessanti divagazioni matematiche. È **fondamentale** svolgere gli esercizi! Rivolto a studenti del secondo anno del corso di laurea in matematica.

### 1. PARENTESI SUI COEFFICIENTI BINOMIALI

Per  $n, k$  interi non negativi, i coefficienti binomiali  $\binom{n}{k}$  sono definiti tramite l'uguaglianza

$$(1+x)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k.$$

Osserviamo immediatamente che  $\binom{n}{k} = 0$  se  $k > n$  e  $\binom{n}{0} = 1$ . Se  $n > 0$ , allora derivando rispetto ad  $x$  ambo i membri e dividendo per  $n$  si ottiene

$$\sum_{k > 0} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

ed eguagliando i coefficienti

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n} \binom{n}{k} \quad \text{per } k > 0.$$

Usando questa formula si dimostra immediatamente per induzione su  $k$  che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Scrivendo invece  $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$  si ricava invece la formula

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**Esercizio 1.** Se  $t$  è una variabile e  $d$  è un intero non negativo, si definisce il polinomio a coefficienti razionali

$$\binom{t}{0} = 1, \quad \binom{t}{d} = \frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (t-i) \in \mathbb{Q}[t] \quad \text{per } d > 0.$$

Dimostrare che:

- (1) Il polinomio  $\binom{t}{d}$  ha grado  $d$  ed ha come radici i numeri interi compresi tra 0 e  $d-1$ .
- (2) Valgono le formule

$$\binom{t}{d} = \frac{t}{d} \binom{t-1}{d-1}, \quad \binom{t+1}{d} - \binom{t}{d} = \binom{t}{d-1}.$$

**Esercizio 2.** Un polinomio  $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$  si dice un **polinomio numerico** se  $p(n) \in \mathbb{Z}$  per ogni intero  $n \gg 0$ . Provare che:

- (1) I polinomi  $\binom{t}{d}$ , con  $d \geq 0$ , sono numerici.
- (2) Se  $p(t)$  è un polinomio numerico, allora  $p(n) \in \mathbb{Z}$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  (Sugg.: il polinomio  $q(t) = p(t+1) - p(t)$  è numerico.)

- (3) Ogni polinomio numerico si scrive in modo unico come una combinazione lineare a coefficienti interi dei polinomi  $\binom{t}{d}$ , con  $d \geq 0$ .
- (4) Con la relazione di ordine  $p \geq q$  se e solo se  $p(n) \geq q(n)$  per  $n \gg 0$ , i polinomi numerici sono un insieme totalmente ordinato.

## 2. LA FORMULA DI WALLIS

**Notazione.** Se  $a_n, b_n$  sono due successioni di numeri reali positivi, scriveremo  $a_n \sim b_n$  se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

**Teorema 2.1** (John Wallis, 1656). *Vale la formula*

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni intero  $n \geq 0$  consideriamo l'integrale definito

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

Si ha  $I_0 = \pi/2$ ,  $I_1 = 1$ , mentre i valori  $I_n$ ,  $n \geq 2$ , possono essere calcolati ricorsivamente mediante la formula di integrazione per parti: infatti

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sin^{n-1}(x) dx \\ &= [-\cos(x) \sin^{n-1}(x)]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-2}(x) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

da cui segue la formula

$$(1) \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Essendo chiaramente  $0 < I_n \leq I_{n-1}$  per ogni  $n$  si ha che

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

e quindi il limite della successione  $I_{n+1}/I_n$  è uguale ad 1. Di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1.$$

Per la formula (1)

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}}{\frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}} = \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} &= \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{I_{2n-3}}{I_{2n-4}} \frac{(2n-2)^2 (2n)^2}{(2n-3)(2n-1)^2 (2n+1)} \\ &= \frac{I_1}{I_0} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)(2n-1)^2 (2n+1)} \\ &= \frac{I_1}{I_0} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)(2n-1)^2} \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Passando al limite la relazione

$$\frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)(2n-1)^2} \frac{n}{2n+1} = \frac{I_0}{I_1} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2 (2n-1)^2 n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{I_0}{I_1} = \frac{\pi}{2}$$

e di conseguenza

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2 (2n-1)^2 n} = \pi,$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1) \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore di (3) per  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n) = 2^n n!$  si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{\pi n}} = 1$$

che equivale a

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

□

*Osservazione 2.2.* In letteratura, spesso la formula di Wallis si enuncia sotto forma di produttoria infinite:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2 (2n-1)^2 (2n+1)}$$

**Esercizio 3.** In questo esercizio proponiamo una dimostrazione dell'eguaglianza

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

che utilizza la formula di Wallis. Per ogni intero  $n \geq 0$  indichiamo

$$G_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx.$$

(1) Provare che  $G_1 = 1/2$ .

(2) Usare l'integrazione per parti per dimostrare che per ogni  $n \geq 0$  vale

$$G_{n+2} = \frac{n+1}{2} G_n.$$

(3) Provare che

$$G_{2k+1} = \frac{k!}{2}, \quad G_{2k+2} = \frac{2k+1}{2^{2k+1}} \frac{(2k)!}{k!} G_0.$$

(4) Provare che per ogni numero reale  $t$  ed ogni  $n \geq 0$  vale

$$\int_0^{+\infty} (t+x)^2 x^n e^{-x^2} dx = t^2 G_n + 2t G_{n+1} + G_{n+2} \geq 0$$

e dedurre che  $G_{n+1}^2 \leq G_n G_{n+2}$ .

(5) Usare le disequaglianze

$$G_{2k}^2 \leq G_{2k-1} G_{2k+1}, \quad G_{2k+1}^2 \leq G_{2k} G_{2k+2}$$

per dedurre che

$$G_{2k}^2 \leq G_{2k-1} G_{2k+1} = \frac{(k-1)! k!}{4}, \quad \frac{(k!)^2}{4} \leq \frac{2k+1}{2} G_{2k}^2,$$

$$G_{2k}^2 \sim \frac{k!(k-1)!}{4}, \quad G_{2k+2} \sim \frac{\sqrt{k+1}}{2} k!.$$

(6) Usare la formula di Wallis per calcolare  $G_0$ .

**Esercizio 4.** (1) Provare che la successione  $a_n = \binom{2n}{n}$  soddisfa l'equazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{4n+2}{n+1} a_n, \quad a_0 = 1.$$

(2) Provare che la serie

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} t^n$$

converge assolutamente nell'intervallo  $-1/4 < t < 1/4$ .

(3) Provare che vale  $(1-4t)f'(t) = 2f(t)$ ,  $f(0) = 1$  e dedurre che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} t^n.$$

(4) Provare che

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

(5) Sia

$$c_0 = 1, \quad c_n = \prod_{i=1}^n \frac{n+1/2}{n+1}.$$

Provare che

$$c_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

**Esercizio 5.** Sapendo che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = 1 + 2t + 6t^2 + \dots$$

dimostrare che

$$\frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n = 1 + t + 2t^2 + \dots$$

(Suggerimento: derivare le funzioni  $\frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^{n+1}$ .)

### 3. PERMUTAZIONI SENZA PUNTI FISSI

Indichiamo con  $d_n$ ,  $n > 0$ , il numero di permutazioni  $\sigma$  di  $\{1, \dots, n\}$  senza punti fissi, ossia tali che  $\sigma(i) \neq i$  per ogni  $i$ . Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{d_n} = e.$$

Poniamo per convenzione  $d_0 = 1$ . Una permutazione di  $\{1, \dots, n\}$  è univocamente determinata dal sottoinsieme dei suoi punti fissi e da una permutazione senza punti fissi del complementare. Ciò significa che per ogni  $k$  con  $0 \leq k \leq n$  il numero di permutazioni con  $k$  punti fissi è uguale a

$$D_n(k) = \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

Sommando per  $k = 0, \dots, n$  si ottiene quindi

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} d_k$$

e dividendo per  $n!$

$$\sum_{k=0}^n \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = 1.$$

Consideriamo la funzione

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} t^n,$$

allora

$$f(t)e^t = \left( \sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} t^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) t^n = \sum_{n \geq 0} t^n = \frac{1}{1-t},$$

da cui

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) t^n.$$

e quindi

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}, \quad \lim_n \frac{d_n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$$

**Esercizio 6.** Nelle notazioni precedenti mostrare che

$$\sum_{n,k} \frac{D_n(k)}{n!} x^n y^k = \frac{e^{-x}}{1-x} e^{xy}.$$

Per ogni numero reale  $r > 0$  calcolare il limite per  $n \rightarrow \infty$  di

$$c_n = \sum_k \frac{D_n(k)}{n!} r^k.$$

**Esercizio 7.** Trovare una formula per i termini della successione  $a_n$  definita dalla relazione ricorsiva

$$(n+1)a_{n+1} = 3a_n + \frac{1}{n!}, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 1.$$

(Sugg.: provare che la funzione generatrice  $f(t) = \sum a_n t^n$  è la soluzione del problema di Cauchy

$$f' = 3f + e^t, \quad f(0) = 1,$$

e quindi che  $f(t) = (3e^{3t} - e^t)/2$ .)

#### 4. LA FORMULA DI STIRLING

Per formula di Stirling si intende la relazione

$$(4) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$$

e più in generale qualsiasi approssimazione del fattoriale di un numero intero con funzioni elementari.

In queste note dimostreremo il seguente teorema, dal quale la formula (4) segue banalmente ed immediatamente.

**Teorema 4.1** (Cesàro, 1922). *Per ogni intero positivo  $n$  valgono le disuguaglianze*

$$\sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{1}{12n+10n+5}} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Ovviamente per dimostrare la formula di Stirling sono sufficienti stime molto meno fini di quelle appena enunciate. Per motivi esclusivamente didattici dimostreremo quindi prima le disuguaglianze

$$(5) \quad \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

e poi, con dei conteggi aggiuntivi, dimostreremo il teorema. Introduciamo le seguenti successioni di numeri reali:

$$d_n = \log(n!) - \left( n + \frac{1}{2} \right) \log(n) + n, \quad c_n = d_n - \frac{1}{12n}, \quad n > 0.$$

**Lemma 4.2.** *Nelle notazioni precedenti, per ogni  $n > 0$  si ha*

$$c_n \leq c_{n+1} \leq d_{n+1} \leq d_n.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $n > 0$  si ha

$$d_n - d_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.$$

Denotando  $t = (2n+1)^{-1}$  si ha  $0 < t \leq 1/3$  e

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 = \frac{1}{2t} (\log(1+t) - \log(1-t)) - 1.$$

Gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned} \log(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \\ \log(1-t) &= -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

sono convergenti per  $0 < t < 1$  e quindi

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t} \left(2t + 2\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + \dots\right) - 1 = \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \dots \geq 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \dots \\ &\leq \frac{1}{3}(t^2 + t^4 + t^6 + \dots) = \frac{1}{3} \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{t^{-2} - 1} \end{aligned}$$

e ricordando che  $t^{-1} = 2n+1$  si ha

$$d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{12} \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)},$$

che equivale a  $c_n \leq c_{n+1}$ . □

Dal lemma segue in particolare che esiste il limite  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$  e che per ogni  $n$  vale

$$d_n - \frac{1}{12n} \leq d \leq d_n,$$

o equivalentemente che

$$(6) \quad d \leq d_n \leq d + \frac{1}{12n}.$$

Esponenziando si ottiene

$$e^d \leq e^{d_n} = \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}} \leq e^d e^{\frac{1}{12n}},$$

e passando al limite per  $n \rightarrow \infty$

$$n! \sim e^d \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}.$$

Immettiamo questa stima asintotica nella formula di Wallis

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{e^d \sqrt{2n} (2n/e)^{2n}}{e^{2d} n (n/e)^{2n}} = \frac{2^{2n} \sqrt{2}}{e^d \sqrt{n}}$$

otteniamo il valore  $e^d = \sqrt{2\pi}$  e abbiamo dimostrato le disuguaglianze (5).

**Lemma 4.3.** *Nelle notazioni precedenti, per ogni  $n > 0$  si ha*

$$d + \frac{1}{12n + \frac{6}{10n+5}} \leq d_n, \quad d = \lim d_n = \log(\sqrt{2\pi}).$$

*Dimostrazione.* Abbiamo già dimostrato che, denotando  $t = (2n+1)^{-1}$  si ha

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t} \left(2t + 2\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + \dots\right) - 1 = \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \dots$$

Siccome  $3^{n-2}(2n+1) \leq 5^{n-1}$  per ogni  $n > 0$  si ha

$$d_n - d_{n+1} \geq \frac{5}{9} \left(\frac{3t^2}{5} + \frac{9t^4}{25} + \left(\frac{3t^2}{5}\right)^3 + \dots\right) = \frac{1}{3} \frac{t^2}{1 - \frac{3t^2}{5}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2 - \frac{3}{5}}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 d_n - d &= \sum_{k=0}^{+\infty} d_{n+k} - d_{n+k+1} \\
 &\geq \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2(n+k)+1)^2 - \frac{3}{5}} \\
 &\geq \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2(n+k) + \frac{1}{10n+5}\right) \left(2(n+k+1) + \frac{1}{10n+5}\right) - \frac{4k}{10n+5}} \\
 &\geq \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2(n+k) + \frac{1}{10n+5}\right) \left(2(n+k+1) + \frac{1}{10n+5}\right)} \\
 &\geq \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2(n+k) + \frac{1}{10n+5}} - \frac{1}{2(n+k+1) + \frac{1}{10n+5}} = \frac{1}{12n + \frac{6}{10n+5}}.
 \end{aligned}$$

□

Esponenziando le disuguaglianze del Lemma 4.3 otteniamo

$$e^d e^{\frac{1}{12n + \frac{6}{10n+5}}} \leq e^{d_n} = \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}}$$

che, assieme all'uguaglianza  $e^d = \sqrt{2\pi}$  conduce immediatamente alla dimostrazione del Teorema (4.1).

*Osservazione 4.4.* Siccome  $(a-b)^{-1} \geq a^{-1} + ba^{-2}$  per ogni  $a > b > 0$ , la dimostrazione del Lemma 4.3 implica che

$$d_n - d \geq \frac{1}{12n + \frac{6}{10n+5}} + \frac{1}{3(10n+5)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4k}{\left(2(n+k) + \frac{1}{10n+5}\right)^2 \left(2(n+k+1) + \frac{1}{10n+5}\right)^2}$$

e questo può essere usato per migliorare la stima del Teorema 4.1.

**Esercizio 8.** Provare che la serie

$$\sum_{n>0} \binom{3n}{n} t^n$$

converge per  $0 \leq t < 4/27$  e diverge per  $t = 4/27$ .

*Soluzione.* Che il raggio di convergenza è  $4/27$  segue facilmente dal criterio del rapporto. Applicando la formula di Stirling si ha

$$\binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \sim \frac{\sqrt{6n\pi} 3^{3n}}{\sqrt{2n\pi} \sqrt{4n\pi} 2^{2n}} = \sqrt{\frac{3}{4n\pi}} \frac{27^n}{4^n}.$$

Quindi per  $n \gg 0$  si ha  $\binom{3n}{n} \frac{4^n}{27^n} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4n\pi}}$  e basta osservare che la serie  $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$  è divergente.

*Osservazione 4.5.* Il fatto che il raggio di convergenza sia  $4/27$  implica che la serie non converge per  $t > 4/27$  ma non dice nulla di cosa succede per  $t = 4/27$ . Ad esempio la serie

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^2} \binom{3n}{n} t^n$$

ha lo stesso raggio di convergenza e converge per  $t = 4/27$ .

## 5. NUMERI DI FIBONACCI

In risposta ad un problema pratico di conigliocultura, Leonardo Pisano (1170-1250), detto Fibonacci, scrive nel suo Liber Abaci la successione

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.$$

In linguaggio moderno si definisce la successione dei *numeri di Fibonacci* tramite la formula ricorsiva

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 1.$$

**Esercizio 9.** Mostrare che per ogni intero positivo  $n$  si ha:

- (1)  $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$ ,
- (2)  $F_3 + \cdots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$ ,
- (3)  $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ .

(Sugg.: induzione su  $n$ .)

**Esercizio 10.** Per ogni intero positivo  $N$  definiamo  $z(N) = \max\{n \mid F_n \leq N\}$ . Provare che  $z(N - F_{z(N)}) \leq z(N) - 2$ .

**Esercizio 11** (Teorema di Zeckendorf). Mostrare che per ogni intero positivo  $N$  esiste una unica successione  $a_1, a_2, \dots, a_n$  di interi maggiori di 1 tali che:

- (1)  $a_{i+1} \geq a_i + 2$  per ogni  $i = 1, \dots, n-1$ ,
- (2)  $N = F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_n}$ .

**Esercizio 12.** Mostrare che per ogni  $a, n \geq 1$  vale la formula

$$F_n F_a + F_{n-1} F_{a-1} = F_{n+a-1}.$$

(Sugg.: vero per  $a = 1, 2$ ; induzione su  $a$ .)

**Esercizio 13.** (1) Mostrare che  $F_n$  e  $F_{n+1}$  non hanno fattori comuni.

(2) Usare il risultato dell'Esercizio 12 per mostrare che il massimo comune divisore di  $F_a, F_b$  è uguale al massimo comune divisore di  $F_a, F_{a+b}$ .

(3) Mostrare che  $MCD(F_a, F_b) = F_{MCD(a,b)}$ .

Dati due numeri reali  $a, b$ , con  $a \neq b$ , si ha, per ogni  $n > 0$  la relazione

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = (a + b) \frac{a^n - b^n}{a - b} - ab \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}.$$

Dunque, se poniamo

$$A_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

vale

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_{n+1} = (a + b)A_n - abA_{n-1}.$$

Siano

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

i due numeri reali tali che

$$x + y = 1, \quad xy = -1, \quad (1 - xt)(1 - yt) = 1 - t - t^2.$$

Allora, se poniamo

$$F_n = \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

si ha

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

e ritroviamo la successione dei numeri di Fibonacci.

La formula precedente può essere anche essere dimostrata usando la serie generatrice dei numeri di Fibonacci:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \cdots = t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + \cdots$$

Moltiplichiamo  $F(t)$  per  $1 - t - t^2$ :

$$(1 - t - t^2)F(t) = (1 - t - t^2)(F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \cdots) =$$



$$= F_0 + (F_1 - F_0)t + (F_2 - F_1 - F_0)t^2 + \dots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})t^n + \dots = t.$$

Si ha dunque

$$F(t) = \frac{t}{1-t-t^2} = \frac{1}{x-y} \left( \frac{1}{1-xt} - \frac{1}{1-yt} \right).$$

Basta adesso osservare che

$$\frac{1}{1-xt} = 1 + xt + x^2t^2 + \dots, \quad \frac{1}{1-yt} = 1 + yt + y^2t^2 + \dots$$

Usando la stessa idea si può invece considerare

$$F(t) = \frac{t}{1-t(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}(1+t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a=0}^n \binom{n}{a} t^{n+a+1}.$$

da cui segue la formula

$$F_{n+1} = \sum_{a \geq 0} \binom{n-a}{a}.$$

Consideriamo le due serie

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}t^n = F_0 + F_2t + F_4t^2 + \dots$$

$$D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}t^n = F_1 + F_3t + F_5t^2 + \dots$$

Per l'Esercizio 9 si ha:

$$\frac{P(t)}{1-t} = F_0 + (F_0 + F_2)t + (F_0 + F_2 + F_4)t^2 + \dots = D(t) - \frac{1}{1-t}.$$

$$\frac{D(t)}{1-t} = F_1 + (F_1 + F_3)t + (F_1 + F_3 + F_5)t^2 + \dots = \frac{P(t)}{t}.$$

Da cui si ricava

$$\frac{tD(t)}{(1-t)^2} = \frac{P(t)}{1-t} = D(t) - \frac{1}{1-t}.$$

$$D(t) \left( 1 - \frac{t}{(1-t)^2} \right) = \frac{1}{1-t},$$

$$D(t) = \frac{1-t}{1-3t+t^2}, \quad P(t) = \frac{t}{1-3t+t^2}.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare partendo dalle uguaglianze

$$F(t) + F(-t) = 2P(t^2), \quad F(t) - F(-t) = 2tD(t^2), \quad F(t) = \frac{t}{1-t-t^2}.$$

Consideriamo la successione  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5, \dots$  definita per ricorrenza

$$u_0 = 0; \quad u_n - 1 = \sum_{i=0}^n (n-i)u_i, \quad \forall n \geq 1.$$

Consideriamo la serie generatrice  $U(t) = u_0 + u_1t + \dots$ . Siccome vale

$$\frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + \dots$$

si ha

$$\frac{tU(t)}{(1-t)^2} = U(t) - \frac{t}{1-t}.$$

da cui  $U(t) = tD(t)$  e quindi  $u_n = F_{2n-1}$  per ogni  $n$ . Abbiamo quindi trovato che per ogni  $n \geq 1$  vale

$$F_{2n+1} - 1 = \sum_{i=0}^n (n-i)F_{2i+1}.$$

Alternativamente, tale uguaglianza si può anche verificare facilmente per induzione su  $n$ . Infatti vale

$$F_3 - 1 = 1 = (1-0)F_1, \quad F_5 - 1 = 4 = 2 + 2 = (2-0)F_1 + (2-1)F_3,$$

e per induzione, tenendo presente l'Esercizio 9,

$$\begin{aligned} F_{2n+1} - 1 &= F_{2n} + (F_{2(n-1)+1} - 1) \\ &= (F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}) + \sum_{i=0}^{n-1} (n-1-i)F_{2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n (n-i)F_{2i+1}. \end{aligned}$$

**Esercizio 14.** Si consideri la successione  $a_n$ :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Calcolare il valore della serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{3^n}.$$

*Soluzione.* Consideriamo la funzione generatrice  $A(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ . Allora

$$A(t) - tA(t) - 2t^2A(t) = a_1 t + \sum_{n \geq 2} (a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2}) t^n = t$$

e quindi come serie formale

$$A(t) = \frac{t}{1-t-2t^2} = \frac{t}{(1+t)(1-2t)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1+t} \right).$$

Dunque il raggio di convergenza della serie è  $1/2$  e per ogni  $r \in (-1/2, 1/2)$  si ha

$$\sum a_n r^n = \frac{r}{1-r-2r^2}.$$

In particolare

$$\sum \frac{a_n}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3-2/9} = 3/4.$$

**Esercizio 15.** Si consideri la successione  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$ . Studiare la convergenza della serie  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{e^n}$ .

## 6. SVILUPPI IN SERIE NOTEVOLI

Elenchiamo alcuni sviluppi in serie più o meno noti:

- $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$
- $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots,$
- $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$
- $\frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n t^n,$
- $\frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} t^n$
- $\tan^{-1} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1},$
- $\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = 1 + 2t + 6t^2 + 20t^3 + 70t^4 + 252t^5 + 924t^6 + 3432t^7 + \cdots$

$$\bullet \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n = 1 + t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 42t^5 + 132t^6 + \dots$$

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{1-4t}} \left( \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+k}{n} t^n$$

Se  $z \in \mathbb{C}$  è un qualunque numero complesso e  $d \in \mathbb{N}$  si pone per definizione

$$\binom{z}{d} = \frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (z-i) \in \mathbb{C}.$$

Se  $z$  è un intero non negativo tale definizione coincide con quella combinatoria. Si dimostra subito che

$$\binom{z}{d} = (-1)^d \binom{d-1-z}{d}.$$

Segue dalla formula di Taylor che

$$\bullet \sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} t^n = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} + \frac{7t^5}{256} - \dots$$

e più in generale per ogni numero reale  $\alpha$  vale

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n-1-\alpha}{n} t^n = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} t^3 + \dots$$

**Esercizio 16.** 1) Mostrare che per ogni coppia di interi  $a, b$ , con  $0 \leq a \leq b$  vale

$$\sum_n \binom{n+a}{b} t^n = \frac{t^{b-a}}{(1-t)^{b+1}}.$$

2) Calcolare, per ogni  $n \geq 0$ , il numero  $a_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}$ . (Suggerimento: scrivere la serie generatrice  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , invertire l'ordine di sommatoria e semplificare.)

**Esercizio 17.** Mostrare che per ogni  $m \geq 0$  vale

$$\sum_{n,k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} x^n = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n,k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k x^n.$$

Quindi per ogni  $n, m \geq 0$  vale l'identità binomiale

$$\sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k.$$

(Suggerimento:

$$\sum_{n,k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} x^n = \sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} \frac{1}{x^k} \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{m} x^{n+k},$$

$$\sum_{n,k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k x^n = \sum_{n,k \geq 0} \binom{m}{k} 2^k \left( \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n \right).$$

**Esercizio 18.** Provare:

$$2 \sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{2k} = (1+x)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1};$$

$$2 \sum_m \binom{2m+1}{2n} x^{2m} = \frac{x^{2n-1}}{(1-x)^{2n+1}} - \frac{x^{2n-1}}{(1+x)^{2n+1}};$$

Calcolare

$$2 \sum_{k,m} \binom{2n+1}{2k} \binom{m+k}{2n} x^{2m}$$

e dedurre l'identità di Graham-Riordan

$$\sum_k \binom{2n+1}{2k} \binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}.$$

**Esercizio 19.** Siano  $f(x)$  un polinomio a coefficienti interi tale che  $f(1) \neq 0$ ,  $d$  un intero  $\geq 0$  e consideriamo la serie

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{d+1}} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Provare che esiste un polinomio numerico  $p(t)$  di grado  $d$  tale che  $p(n) = a_n$  per ogni  $n \gg 0$ . Mostrare inoltre che

$$p(t) = \frac{f(1)}{d!} t^d + \text{termini di grado inferiore.}$$

**Esercizio 20.** Dimostrare che per ogni coppia  $n, m$  di interi non negativi vale la formula

$$n! m! = (n+m+1)! \int_0^1 x^n (1-x)^m dx.$$

(Sugg.: induzione su  $m$  ed integrazione per parti.)

**Esercizio 21.** Sia  $m$  un intero positivo, provare che

$$\sum_{n \geq m} \frac{(n-m)!}{n!} t^n = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (1-t)^{m-1} \log(1-t) + q(t)$$

con  $q(t)$  polinomio di grado  $< m$ .

*Soluzione.* Sia

$$g(t) = (m-1)! \sum_{n \geq m} \frac{(n-m)!}{n!} t^n.$$

Per l'Esercizio 20 si ha

$$g(t) = \sum_{n \geq m} t^n \int_0^1 x^{n-m} (1-x)^{m-1} dx.$$

Considerando lo sviluppo del binomio

$$(1-x)^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} x^i$$

otteniamo

$$g(t) = \sum_{n \geq m} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} t^n \int_0^1 x^{n-m+i} dx = \sum_{n \geq m} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} \frac{t^n}{n-m+i+1}$$

$$g(t) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} t^{m-i-1} \sum_{n \geq m} \frac{t^{n-m+i+1}}{n-m+i+1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} t^{m-i-1} (-\log(1-t) + h_i(t))$$

dove  $h_i$  è un polinomio in  $t$  di grado  $i$ .

$$g(t) = (-1)^m \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} \binom{m-1}{i} t^{m-i-1} (\log(1-t) - h_i(t)) = (-1)^m (1-t)^{m-1} \log(1-t) + h(t)$$

con  $h$  polinomio in  $t$  di grado  $< m$ .

Allo stesso risultato si può arrivare osservando che per ogni  $h \leq m$  la derivata  $h$ -esima di  $x^m \log(x)$  è uguale a

$$\frac{m!}{(m-h)!} x^{m-h} \log(x) + \text{polinomio di grado } \leq m-h.$$

e quindi che  $(x^m \log(x))^{(m+1)} = \frac{m!}{x}$ .

## 7. LA DERIVATA LOGARITMICA

Supponiamo di avere una funzione sviluppabile in serie di Taylor

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

e tale che  $a_0 > 0$ . Un modo per trovare relazioni tra i coefficienti  $a_n$  è quello di considerare la derivata del logaritmo di entrambi i membri, ossia considerare l'equazione

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{n \geq 0} n a_n t^{n-1}}{\sum_{n \geq 0} a_n t^n}.$$

Vediamo un esempio: abbiamo già osservato che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} t^n.$$

La derivata logaritmica è

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4t}}}{\frac{1}{\sqrt{1-4t}}} = \frac{2}{1-4t}$$

e quindi

$$\sum_{n \geq 1} n \binom{2n}{n} t^{n-1} = \frac{2}{1-4t} \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} t^n = 2 \left( \sum_{k \geq 0} 4^k t^k \right) \left( \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} t^n \right)$$

da cui

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2i}{i} 4^{n-i}.$$

**Esercizio 22.** Trovare una formula ricorsiva per i coefficienti dello sviluppo in serie di  $e^{e^t}$  (Suggerimento: derivata logaritmica).

**Esercizio 23.** Sia

$$e^{x+x^2} = \sum a_n x^n = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots$$

Mostrare che

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 2a_{n-2}}{n}$$

per ogni  $n \geq 2$ .

**Esercizio 24.** Sia  $a_n$  una successione di interi e siano  $p, q$  interi positivi senza fattori comuni. Provare che  $p$  divide il coefficiente di  $t^q$  nella serie formale

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n t^n \right)^p.$$

*Soluzione.* Se  $p = 1$  non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo  $p > 1$  e scriviamo

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n t^n \right)^p = \sum_{m \geq 0} b_m t^m.$$

Derivando si ottiene

$$p \left( \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} \right) \left( \sum_{n \geq 0} a_n t^n \right)^{p-1} = \sum_{m \geq 0} m b_m t^{m-1}$$

e siccome i coefficienti della serie

$$\left( \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} \right) \left( \sum_{n \geq 0} a_n t^n \right)^{p-1}$$

sono interi ne consegue che  $p$  divide  $m b_m$  per ogni  $m$ .

**Esercizio 25.** Si considerino i polinomi  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  definiti dalla relazione

$$1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \cdots (1 + x_n t);$$

$$\sigma_1 = \sum_i x_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i < j} x_i x_j, \quad \dots \quad \sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Per ogni  $d \geq 0$  si consideri inoltre il polinomio

$$\psi_0 = n, \quad \psi_d = x_1^d + \dots + x_n^d \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n].$$

Dimostrare:

- (1) Ogni  $\psi_d$  è un polinomio a coefficienti interi nei  $\sigma_j$ . Ad esempio  $\psi_1 = \sigma_1$ ,  $\psi_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$  eccetera. Suggerimento: considerare l'espressione (derivata logaritmica)

$$\frac{\frac{d}{dt}(1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n)}{1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n}.$$

- (2) Ogni  $\sigma_d$  è un polinomio a coefficienti razionali negli  $\psi_j$ . Ad esempio  $\sigma_2 = \frac{\psi_1^2 - \psi_2}{2}$ .

*Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned} \log(1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n) &= \log((1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \cdots (1 + x_n t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i t) = \sum_{i=1}^n \sum_{d>0} (-1)^d x_i^d \frac{t^d}{d} = \sum_{d>0} (-1)^d \psi_d \frac{t^d}{d} \end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$\frac{\frac{d}{dt}(1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n)}{1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n} = \sum_{d>0} (-1)^d \psi_d t^{d-1}$$

e quindi  $(-1)^d \psi_d$  è il coefficiente di  $t^{d-1}$  nella serie

$$(\sigma_1 + 2\sigma_2 t + \dots + n\sigma_n t^{n-1}) \left( \sum_{h \geq 0} (-1)^h (\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n)^h \right).$$

Viceversa

$$1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n = \exp(\log(1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_n t^n)) = \exp\left(\sum_{d>0} (-1)^d \psi_d \frac{t^d}{d}\right)$$

e quindi  $\sigma_i$  è il coefficiente di  $t^i$  nella serie

$$\sum_{h \geq 0} \frac{1}{h!} \left( \sum_{d>0} (-1)^d \psi_d \frac{t^d}{d} \right)^h.$$

**Esercizio 26.** Sia  $n > 0$  intero fissato. Il numero di inversioni di una permutazione  $\sigma$  di  $\{1, \dots, n\}$  è il numero di coppie  $(i, j)$  con  $1 \leq i < j \leq n$  tali che  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Indichiamo con  $I_k$ ,  $0 \leq k \leq n(n-1)/2$ , il numero di permutazioni che hanno  $k$  inversioni. Dimostrare che

$$\sum_k I_k x^k = \prod_{i=2}^n \frac{x^i - 1}{x - 1}.$$

## 8. NUMERI DI BELL

Dato un intero  $n > 0$  si definisce  $b(n)$  come il numero di relazioni di equivalenza possibili nell'insieme  $\{1, \dots, n\}$ . I numeri  $b(n)$  vengono detti *numeri di Bell*;  $b(1) = 1$ ,  $b(2) = 2$ ,  $b(3) = 5$  eccetera. Si pone inoltre per convenzione  $b(0) = 1$ .

**Lemma 8.1.** Per ogni  $n \geq 0$  vale la formula ricorsiva

$$b(n+1) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} b(s).$$

*Dimostrazione.* Basta mostrare che il numero di relazioni di equivalenza su  $\{0, 1, \dots, n\}$  in cui la classe di equivalenza di 0 contiene  $n - s + 1$  elementi, con  $0 \leq s \leq n$ , è uguale a  $\binom{n}{s} b(s)$ .

Ogni tale relazione è univocamente determinata da un sottoinsieme  $S \subset \{1, \dots, n\}$  di cardinalità  $s$  e da una relazione di equivalenza su  $S$ . Gli elementi del complementare di  $S$  saranno quelli equivalenti a 0.  $\square$

**Esercizio 27.** Provare per induzione su  $n$  che  $b(n) \leq n!$ .

**Teorema 8.2.** Nelle notazioni precedenti, e con la convenzione che  $0^0 = 1$ , vale

$$\sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n = e^{e^x - 1} \quad e \quad b(n) = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{r^n}{r!} \quad \text{per ogni } n \geq 0.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo per induzione su  $n$  che vale la formula  $b(n) = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{r^n}{r!}$ . Si ha

$b(0) = 1 = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!}$ , mentre per il Lemma 8.1 si ha

$$\begin{aligned} b(n+1) &= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} b(s) = \frac{1}{e} \sum_{s=0}^n \sum_{r \geq 0} \binom{n}{s} \frac{r^s}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} r^s \\ &= \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} (1+r)^n = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{(1+r)^{n+1}}{(r+1)!} = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 1} \frac{r^{n+1}}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{r^{n+1}}{r!}. \end{aligned}$$

La serie generatrice  $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n$  è convergente in un intorno di 0, si ha  $B(0) = b(0) = 1$

$$F(x)' = \sum_{n \geq 0} b(n+1) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} b(s) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{s=0}^n b(s) \frac{x^s}{s!} \frac{x^{n-s}}{(n-s)!} = B(x)e^x.$$

Il problema di Cauchy

$$F(x)' = e^x F(x), \quad B(0) = 1,$$

ha come soluzione  $B(x) = e^{e^x - 1}$ .  $\square$

Notiamo che

$$\sum_{n \geq 0} b(n) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{e^{rx}}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{r^n x^n}{n! r!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \left( \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{r^n}{r!} \right).$$

e quindi che le due uguaglianze del teorema sono una conseguenza dell'altra.

## 9. I NUMERI DI STIRLING

**Esercizio 28.** Si consideri la successione di polinomi

$$S_0(x) = 1, \quad S_{n+1}(x) = x(S_n(x) + S_n(x)') = x e^{-x} (S_n(x) e^x)'$$

Dimostrare che  $S_n(1) = b(n)$ . I coefficienti di tali polinomi

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k$$

si chiamano *numeri di Stirling di seconda specie*. Dimostrare che, ponendo  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$  per  $k < 1$  e  $k > n$ , si hanno le formule

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}.$$

Mostrare inoltre che  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  è uguale al numero di relazioni di equivalenza di  $\{1, \dots, n\}$  con  $k$  classi di equivalenza (Sugg.: ragionamento analogo al Lemma 8.1).

Si noti che i numeri  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ , con  $n, k > 0$  sono univocamente determinati dalle condizioni

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix} \right\} = 0 \quad i \neq 1, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$$

**Lemma 9.1.** Sia  $f(t) \in \mathbb{K}[[t]]$  serie formale e poniamo  $g(t) = f(e^t - 1)$ . Per ogni  $n > 0$  vale la formula

$$g^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\} f^{(i)}(e^t - 1) e^{it}$$

dove  $f^{(i)}$  indica la derivata  $i$ -esima.

*Dimostrazione.* Induzione su  $n$ , essendo per  $n = 1$  la semplice derivata della funzione composta.

$$g^{(n+1)}(t) = \sum_i \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\} (f^{(i+1)}(e^t - 1) e^{(i+1)t} + i f^{(i)}(e^t - 1) e^{it})$$

$$g^{(n+1)}(t) = \sum_i \left( \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i-1 \end{smallmatrix} \right\} + i \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\} \right) f^{(i)}(e^t - 1) e^{it}$$

□

Ponendo  $f(t) = t^k$  otteniamo

$$g^{(n)}(0) = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} k!$$

e quindi

$$(e^t - 1)^k = k! \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{t^n}{n!} = k! t^k \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{smallmatrix} n+k \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{t^n}{(n+k)!}.$$

$$\left( \frac{e^t - 1}{t} \right)^k = k! \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{smallmatrix} n+k \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{t^n}{(n+k)!}.$$

**Esercizio 29.** Provare che per ogni  $n > 1$  si ha

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\} (i-1)! = 0.$$

(Sugg.:  $f(t) = \log(1+t)$ ).

**Teorema 9.2.** Dati due interi positivi  $n, k$ , il numero

$$W_{n,k} = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n$$

è uguale al numero di applicazioni surgettive  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . In particolare  $W_{n,k} = 0$  per ogni  $k > n$ .



*Dimostrazione.* Definiamo

$$X = \{(S, f) \mid S \subset \{1, \dots, k\}, \quad f: \{1, \dots, n\} \rightarrow S\},$$

allora

$$W_{n,k} = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n = \sum_{(S,f) \in X} (-1)^{k-|S|},$$

dove  $|S|$  indica la cardinalità dell'insieme  $S$ . Possiamo scrivere anche

$$W_{n,k} = \sum_f W_{n,k}(f), \quad \text{dove} \quad W_{n,k}(f) = \sum_{S: \text{Im}(f) \subset S} (-1)^{k-|S|}.$$

È chiaro che se  $f$  è surgettiva allora  $W_{n,k}(f) = 1$ . Basta quindi dimostrare che se  $f$  non è surgettiva, allora  $W_{n,k}(f) = 0$ . Supponiamo che  $|\text{Im}(f)| = s$  con  $s < k$ , allora per ogni  $s \leq r \leq k$  il numero di sottoinsiemi  $S \subset \{1, \dots, k\}$  di cardinalità  $r$  che contengono  $\text{Im}(f)$  è  $\binom{k-s}{r-s}$  e quindi

$$W_{n,k}(f) = \sum_{r=s}^k (-1)^{k-r} \binom{k-s}{r-s} = \sum_{i=0}^{k-s} (-1)^{k-s-i} \binom{k-s}{i} = (1-1)^{k-s} = 0.$$

□

Con la convenzione che  $0^0 = 1$  si ha inoltre  $W_{0,0} = 1$  e  $W_{n,0} = W_{0,k} = 0$  per ogni  $k, n > 0$ .

**Esercizio 30.** Dimostrare che  $W_{n,k} = \binom{n}{k} k!$ .

**Esercizio 31.** Utilizzare il Teorema 9.2 per calcolare i numeri di Stirling di seconda specie e per dare una dimostrazione alternativa del Teorema 8.2.

## 10. I NUMERI DI BERNOULLI

I *numeri di Bernoulli*  $B_n$ ,  $n \geq 0$ , sono definiti mediante la loro EGF (exponential generating function)

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1}.$$

*Osservazione 10.1.* Mostriamo nella Sezione 11 che per ogni  $n \geq 0$  vale  $|B_n| \leq \frac{\pi^2}{3} \frac{n!}{(2\pi)^n}$ ,

mentre per ogni  $n$  pari vale  $|B_n| \geq \frac{n!}{(2\pi)^n}$ . In particolare il raggio di convergenza della serie

$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$  è  $2\pi$ . È possibile calcolare il valore del raggio di convergenza in maniera semplice utilizzando la teoria delle funzioni olomorfe (insegnamento di variabile complessa).

**Teorema 10.2.** *Nelle notazioni precedenti vale la formula*

$$B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1}.$$

*Dimostrazione.* Bisogna dimostrare che la funzione generatrice

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1}$$

è uguale a  $t/(e^t - 1)$ . Siccome  $W_{n,k} = 0$  se  $n < k$  possiamo scrivere

$$f(t) = \sum_{n,k \geq 0} (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1} \frac{t^n}{n!},$$

che per il Teorema 9.2 diventa

$$f(t) = \sum_{n,k \geq 0} \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{1}{k+1} \binom{k}{r} r^n \frac{t^n}{n!}.$$

Sommando su  $n$  si ha allora

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{1}{k+1} \binom{k}{r} \sum_{n \geq 0} r^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^r}{k+1} \binom{k}{r} e^{rt} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1} (1 - e^t)^k.$$

Quindi

$$((1 - e^t)f(t))' = -e^t \sum_{k \geq 0} (1 - e^t)^k = \frac{-e^t}{1 - (1 - e^t)} = -1,$$

da cui segue

$$(1 - e^t)f(t) = -t, \quad f(t) = \frac{t}{e^t - 1}.$$

□

**Esercizio 32.** Calcolare  $B(x) - B(-x)$  e dedurre che  $B_n = 0$  per ogni  $n$  dispari maggiore di 2.

**Esercizio 33.** Mostrare che  $B(x)e^x = B(-x)$  e dedurre che per ogni  $n \geq 1$  vale

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

$$B_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2k} B_{2k}.$$

Utilizzate tali formule per provare che

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}.$$

**Esercizio 34.** Per ogni coppia di interi  $d, n \geq 0$  indichiamo con  $g_d(n) = 0^d + 1^d + 2^d + \dots + (n-1)^d$  (dove si intende  $0^0 = 1$ ). Si ha  $g_0(n) = n$ ,  $g_1(n) = n(n-1)/2$  eccetera. Dimostrare che

$$\sum_{d \geq 0} \frac{g_d(n)}{d!} x^d = \sum_{h=0}^{n-1} e^{hx} = \sum_{h=0}^{n-1} (e^x)^h = \frac{e^{nx} - 1}{x} \frac{x}{e^x - 1} = B(x) \left( \sum_{r > 0} \frac{n^r}{r!} x^r \right)$$

e dedurre la formula

$$g_d(n) = \frac{1}{d+1} \sum_{r=1}^{d+1} \binom{d+1}{r} B_{d+1-r} n^r = \sum_{s=0}^d \frac{1}{s+1} \binom{d}{s} B_{d-s} n^{s+1}.$$

**Test: siete più veloci di Bernoulli?** Jakob Bernoulli si vantava di aver calcolato in meno di 8 minuti la sommatoria  $g_{10}(1000)$ . Utilizzando i risultati degli esercizi precedenti, sapere fare altrettanto? (Ovviamente Bernoulli faceva tutti i conti a mano).

**Esercizio 35.** Sia  $Q(x) = B(-x)$ ; provare che  $xQ(x)' = Q(x) - Q(x)B(x)$  e dedurre la formula:

$$(1 + n(-1)^n)B_n = - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} B_k B_{n-k}.$$

**Esercizio 36.** Provare che  $xB(x)' = (1-x)B(x) - B(x)^2$  e dedurre la formula (di Eulero):

$$-B_n = B_{n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B_k B_{n-k}.$$

**Esercizio 37.** Si considerino le successioni  $\phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $I_n \in \mathbb{Q}$ ,  $n \geq 1$ , definite per ricorrenza:

$$I_0 = -1, \quad \phi_1(x) = x, \quad I_n = \int_0^1 \phi_n(x) dx, \quad \phi_{n+1}(x) = \int_0^x \phi_n(s) ds - xI_n.$$

Dimostrare che

$$\sum_{n \geq 0} (\phi_n(x) - I_n) t^n = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} \quad \text{e} \quad I_n = -\frac{B_n}{n!}.$$

(Suggerimento: sia  $F(x, t) = \sum_{n \geq 0} (\phi_n(x) - I_n) t^n$ ; calcolare la derivata di  $F$  rispetto a  $x$  e determinare il rapporto  $F(x, t)/F(0, t)$ . Mostrare inoltre che  $\int_0^1 F(x, t) dx = 1$ .)

**Esercizio 38.** I polinomi di Bernoulli  $B_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$  si definiscono tramite la EGF

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$

Provare che

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \left( \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} t^m \right) \left( \sum_{r \geq 0} \frac{x^r}{r!} t^r \right), \quad B_n(x) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_{n-r} x^r.$$

Mostrare inoltre che  $g_{n-1}(m) = \frac{B_n(m) - B_n}{n}$ .

**Esercizio 39.** Dato un intero  $n > 0$  provare che per ogni  $d \geq 0$  vale

$$\sum_{r=0}^d \binom{d+1}{r} g_r(n) = n^{d+1}, \quad \sum_{r=0}^{+\infty} \binom{d+1}{r} g_r(n) = n^{d+1} + g_{d+1}(n) = g_{d+1}(n+1).$$

**Esercizio 40.** Provare che la matrice  $(g_d(r+1))$ ,  $1 \leq d, r \leq m$ , è invertibile (sugg.: sottrarre ad ogni colonna la precedente e ridursi ad una matrice di Vandermonde). Lo stesso vale se nell'ultima riga il termine  $g_m(r+1)$  è sostituito con  $r^m$ .

**Esercizio 41.** Usare gli Esercizi 39 e 40 per dedurre che la matrice di coefficienti  $a_{d,r} = \binom{d+1}{r}$ ,  $0 \leq d, r \leq m$ , è invertibile.

## 11. NUMERI DI BERNOULLI E ZETA DI RIEMANN

In questa sezione dimostriamo che per ogni intero  $n > 0$  vale

$$\zeta(2n) = -\frac{(-1)^n B_{2n}}{2} (2\pi)^{2n},$$

dove

$$\zeta(s) = \sum_{l>0} \frac{1}{l^s}$$

è la funzione zeta di Riemann.

**Lemma 11.1.** Sia  $m$  un intero positivo dispari, allora

$$\sin(x) = m \sin\left(\frac{x}{m}\right) \prod_{l=1}^{m/2} \frac{\sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{m}\right)}{\sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)}$$

*Dimostrazione.* Dalla formula

$$\cos(x) + i \sin(x) = \left( \cos\left(\frac{x}{m}\right) + i \sin\left(\frac{x}{m}\right) \right)^m$$

segue che  $\sin(x)$  è un polinomio di grado  $m$  in  $\cos\left(\frac{x}{m}\right)$  e  $\sin\left(\frac{x}{m}\right)$ . Inoltre siccome  $m$  è dispari, in tale polinomio il coseno appare sempre con esponente pari, sostituendo  $\cos^2$  con  $1 - \sin^2$  troviamo un polinomio  $Q(z)$  di grado  $m$  tale che  $\sin(x) = Q\left(\sin\left(\frac{x}{m}\right)\right)$ . Siccome  $\sin(k\pi) = 0$  per ogni intero  $k$ , ne segue che gli  $m$  numeri reali distinti

$$\sin\left(\frac{l\pi}{m}\right), \quad -\frac{m}{2} < l < \frac{m}{2}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

annullano il polinomio  $Q$  e pertanto ne sono le radici. Esiste dunque una costante  $A$  tale che

$$Q(z) = A \prod_{-m/2 < l < m/2} (z - \sin\left(\frac{l\pi}{m}\right)) = Az \prod_{l=1}^{m/2} (z^2 - \sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)).$$

Dunque

$$(7) \quad \sin(x) = A \sin\left(\frac{x}{m}\right) \prod_{l=1}^{m/2} (\sin^2\left(\frac{x}{m}\right) - \sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)),$$

Dividendo per  $x$  e passando al limite per  $x \rightarrow 0$  si ottiene

$$1 = \frac{A}{m} \prod_{l=1}^{m/2} \left(-\sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)\right).$$

□

Prendiamo la derivata logaritmica dell'Equazione 7 e poi moltiplichiamo per  $x$ , otteniamo che per ogni  $x \in (-\pi, \pi)$  vale

$$\begin{aligned} x \cot(x) &= \frac{x}{m} \cot\left(\frac{x}{m}\right) + \sum_{l=1}^{m/2} \frac{\frac{2x}{m} \cos\left(\frac{x}{m}\right) \sin\left(\frac{x}{m}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{m}\right) - \sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)}, \\ (8) \quad x \cot(x) &= \frac{x}{m} \cot\left(\frac{x}{m}\right) + \sum_{l=1}^{m/2} \frac{2xm \cos\left(\frac{x}{m}\right) \sin\left(\frac{x}{m}\right)}{m^2 \sin^2\left(\frac{x}{m}\right) - m^2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)}. \end{aligned}$$

Notiamo che per ogni  $l$  ed ogni  $x$  si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x}{m} \cot\left(\frac{x}{m}\right) = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2xm \cos\left(\frac{x}{m}\right) \sin\left(\frac{x}{m}\right)}{m^2 \sin^2\left(\frac{x}{m}\right) - m^2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)} = \frac{2x^2}{x^2 - l^2\pi^2}.$$

**Lemma 11.2.** *Siano date le successioni di numeri reali*

$$\{a_{l,m}\}, \quad \{b_l\}, \quad \{c_n\}, \quad l, m > 0, \quad n \geq N,$$

con le seguenti proprietà:

- (1) Per ogni  $l$  vale  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{l,m} = b_l$ .
- (2) Per ogni  $l \geq N$  ed ogni  $m$  vale  $|a_{l,m}| \leq c_l$ .
- (3)  $\sum_l c_l < \infty$ .

Allora le serie  $\sum_l a_{l,m}$  e  $\sum_l b_l$  sono assolutamente convergenti e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_l a_{l,m}\right) = \sum_l b_l.$$

*Dimostrazione.* Si tratta di un classico risultato di analisi. Riportiamo la dimostrazione per completezza.

Chiaramente  $|b_l| = \lim_m |a_{l,m}| \leq c_l$  per ogni  $l \geq N$ ; dunque le serie  $\sum_l a_{l,m}$  e  $\sum_l b_l$  sono assolutamente convergenti. Sia  $\epsilon > 0$  e scegliamo  $A \geq N$  tale che  $\sum_{l \geq A} c_l < \epsilon$ . Allora per ogni  $m$  vale

$$\left|\sum_{l \geq A} a_{l,m}\right| < \epsilon, \quad \left|\sum_{l \geq A} b_l\right| < \epsilon$$

e quindi

$$\left|\sum_l a_{l,m} - \sum_l b_l\right| < \left|\sum_{l < A} a_{l,m} - \sum_{l < A} b_l\right| + 2\epsilon$$

e per  $m$  sufficientemente grande il primo addendo del secondo membro può essere reso piccolo a piacere. □

**Teorema 11.3.** *Per ogni  $x \in (-\pi, \pi)$  vale*

$$x \cot(x) = 1 + \sum_{l > 0} \frac{2x^2}{x^2 - l^2\pi^2}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $x$  fissato; siccome entrambi i membri dell'equazione sono pari non è restrittivo supporre  $x \geq 0$ . Consideriamo la successione

$$a_{l,m} = \begin{cases} \frac{2xm \cos\left(\frac{x}{m}\right) \sin\left(\frac{x}{m}\right)}{m^2 \sin^2\left(\frac{x}{m}\right) - m^2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)} & \text{per } l < m/2, \\ 0 & \text{per } l \geq m/2. \end{cases}$$

Ricordiamo che, per la convessità del seno si ha

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x, \quad \text{per ogni } x \in [0, \pi/2],$$

e quindi per ogni  $l \geq 2$ ,  $m > 2l$  vale

$$\left| 2xm \cos\left(\frac{x}{m}\right) \sin\left(\frac{x}{m}\right) \right| \leq 2x^2 \leq 2\pi^2,$$

$$\left| m^2 \sin^2\left(\frac{x}{m}\right) - m^2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right) \right| = m^2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right) - m^2 \sin^2\left(\frac{x}{m}\right) \geq \frac{4}{\pi^2} l^2 \pi^2 - x^2 \geq 4l^2 - \pi^2 \geq l^2.$$

Dunque  $|a_{l,m}| \leq \frac{2\pi^2}{l^2}$  per ogni  $m$  ed ogni  $l \geq 2$ . Possiamo quindi passare al limite l'Equazione 8 e concludere la dimostrazione.  $\square$

Possiamo riscrivere l'equazione del Teorema 11.3 come

$$x \cot(x) = 1 - \sum_{l>0} \frac{2x^2}{l^2 \pi^2} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{l^2 \pi^2}} = 1 - \sum_{l>0} \frac{2x^2}{l^2 \pi^2} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{l^{2n} \pi^{2n}} = 1 - \sum_{n \geq 0} \frac{2x^{2n+2}}{\pi^{2n+2}} \sum_{l>0} \frac{1}{l^{2n+2}}.$$

Abbiamo dunque dimostrato che

$$x \cot(x) = 1 - 2 \sum_{n>0} \frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} \zeta(2n).$$

Possiamo trovare un'altra descrizione dello sviluppo in serie di  $x \cot(x)$ . Infatti

$$\begin{aligned} x \cot(x) &= ix \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = ix \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1} \\ &= \frac{ix}{e^{2ix} - 1} + \frac{ix e^{2ix}}{e^{2ix} - 1} = \frac{ix}{e^{2ix} - 1} - \frac{ix}{e^{-2ix} - 1} = \frac{1}{2} (B(2ix) - B(-2ix)) \\ &= 1 + \sum_{n>0} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2ix)^{2n} = 1 + \sum_{n>0} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (-1)^n x^{2n} \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\zeta(2n) = -\frac{(-1)^n B_{2n}}{2} (2\pi)^{2n}, \quad B_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n).$$

Ad esempio

$$\zeta(2) = \frac{1}{2} \frac{B_2}{2!} (2\pi)^2 = B_2 \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Siccome  $\zeta(2) \geq \zeta(2n) \geq 1$  troviamo

$$2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \leq |B_{2n}| \leq \frac{\pi^2}{3} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

**Esercizio 42.** Provare che per  $x \in (-\pi, \pi)$  vale

$$\sin(x) = x \prod_{l>0} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2 \pi^2} \right).$$

(Suggerimento: le due funzioni sono dispari, hanno la stessa derivata in 0 e la stessa derivata logaritmica in  $(0, \pi)$ .)

**Esercizio 43.** Calcolare  $\sin(\pi/2)$  usando l'Esercizio 42 e dedurre la formula di Wallis.

**Esercizio 44.** Utilizzare il risultato dell'Esercizio 42 per calcolare il prodotto

$$\prod_{l \in A} \frac{(2l-1)(2l+1)}{(2l)^2}$$

nei seguenti casi:

- (1)  $A = \{l \in \mathbb{N} \mid l > 0 \text{ pari}\}$ ,
- (2)  $A = \{l \in \mathbb{N} \mid l > 0 \text{ dispari}\}$ .

## 12. ELEMENTI DI LIE E OPERATORI AGGIUNTI

Lavoreremo sul campo dei numeri reali anche se molti degli argomenti trattati valgono in maggiore generalità. Per algebra intenderemo un anello commutativo che è anche uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Un esempio di algebra è quello delle funzioni di classe  $C^\infty$  su un aperto di  $\mathbb{R}$ . Se  $H$  è un'algebra denoteremo con  $M_n(H)$  lo spazio vettoriale delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $R$ . Se  $V$  è uno spazio vettoriale indicheremo con  $\text{End}(V)$  lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari  $V \rightarrow V$ ; il prodotto di composizione in  $\text{End}(V)$  è associativo.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale, per ogni  $A, B \in \text{End}(V)$  denotiamo

$$[A, B] = AB - BA.$$

Si noti che  $[B, A] = -[A, B]$ , che l'applicazione  $(A, B) \mapsto [A, B]$  è bilineare e vale la cosiddetta *identità di Jacobi*:

$$[[A, B], C] = [A, [B, C]] - [B, [A, C]].$$

**Definizione 12.1.** Un sottospazio vettoriale  $W \subset \text{End}(V)$  si dice *sottoalgebra di Lie* se per ogni  $A, B \in W$  vale  $[A, B] \in W$ .

Ad esempio gli operatori a traccia nulla sono una sottoalgebra di Lie di  $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ .

Dati due sottospazi vettoriali  $Z, W \subset \text{End}(V)$  denotiamo con  $[Z, W]$  il sottospazio vettoriale generato da tutti i vettori del tipo  $[z, w]$ , al variare di  $z \in Z$  e  $w \in W$ . Si pone poi

$$Z^1 = Z, \quad Z^2 = [Z, Z] = [Z, Z^1], \quad Z^n = [Z, Z^{n-1}].$$

**Lemma 12.2.** Per ogni  $n, m > 0$  vale  $[Z^n, Z^m] \subset Z^{n+m}$ .

*Dimostrazione.* Induzione su  $n$ , essendo il risultato vero per definizione quando  $n = 1$ . Supponiamo  $n > 1$ ; siccome ogni elemento di  $Z^n$  è combinazione lineare di elementi del tipo  $[z, v]$ , con  $z \in Z$  e  $v \in Z^{n-1}$  basta dimostrare che

$$[[z, v], w] \in Z^{n+m} \quad \text{per ogni } z \in Z, v \in Z^{n-1}, w \in Z^m.$$

Per l'identità di Jacobi vale

$$[[z, v], w] = [z, [v, w]] - [v, [z, w]],$$

mentre per l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} [z, [v, w]] &\in [Z, [Z^{n-1}, Z^m]] \subset [Z, Z^{n+m-1}] \subset Z^{n+m}, \\ [v, [z, w]] &\in [Z^{n-1}, [Z, Z^m]] \subset [Z^{n-1}, Z^{m+1}] \subset Z^{n+m}. \end{aligned}$$

□

**Definizione 12.3.** Chiameremo i vettori di  $Z^n$  *elementi di Lie* di peso  $n$  di  $Z$ .

Dato  $A \in \text{End}(V)$  definiamo l'operatore lineare (detto operatore aggiunto)

$$\text{ad } A: \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V), \quad \text{ad } A(B) = [A, B].$$

Il prossimo lemma descrive gli effetti delle iterazioni di un operatore aggiunto.

**Lemma 12.4.** Per ogni  $A, B \in \text{End}(V)$  ed ogni intero  $n \geq 0$  vale

$$(\text{ad } A)^n B = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} A^{n-i} B A^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^{n-i} B (-A)^i.$$

*Dimostrazione.* Abbiamo

$$(\text{ad } A)^n B = A(\text{ad } A)^{n-1}(B) - (\text{ad } A)^{n-1}(B)A$$

e per induzione

$$(\text{ad } A)^n B = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} A^{n-i} B A^i - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} A^{n-1-j} B A^{j+1}.$$

Ponendo  $j = i - 1$  sulla seconda sommatoria

$$(\text{ad } A)^n B = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} A^{n-i} B A^i + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n-1}{i-1} A^{n-i} B A^i =$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left( \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) A^{n-i} B A^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} A^{n-i} B A^i.$$

□

## 13. ESPONENZIALE E LOGARITMO DI MATRICI

Data una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  definiamo la sua norma pensandola come un vettore di  $\mathbb{R}^{n^2}$ , ossia se  $A = (a_{ij})$ , allora

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

Per la disuguaglianza triangolare si ha  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ . Vale inoltre la formula  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  (e di conseguenza  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ ): infatti se  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  si ha

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j} \left( \sum_k a_{ik} b_{kj} \right)^2;$$

Il termine  $\sum_k a_{ik} b_{kj}$  è il prodotto scalare di due vettori, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left( \sum_k a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \left( \sum_s a_{is}^2 \right) \left( \sum_r b_{rj}^2 \right)$$

e quindi

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i,j} \left( \sum_s a_{is}^2 \right) \left( \sum_r b_{rj}^2 \right) = \left( \sum_{i,s} a_{is}^2 \right) \left( \sum_{r,j} b_{rj}^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

Ne consegue che il valore assoluto di ogni coefficiente di  $A^n$  è maggiorato da  $\|A\|^n$  e quindi:

- (1) La serie  $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$  è totalmente convergente per ogni matrice  $A$ .
- (2) La serie  $\sum_{n > 0} \frac{A^n}{n}$  è totalmente convergente per ogni matrice  $A$  tale che  $\|A\| < 1$ .

In analogia con il caso di una variabile denoteremo

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}, \quad \log(I - A) = - \sum_{n > 0} \frac{A^n}{n}.$$

Notiamo che  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$  e che  $\|e^A - I\| \leq e^{\|A\|} - 1$ . Osserviamo anche che le componenti dell'applicazione esponenziale

$$M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto e^A,$$

sono serie di potenze, quindi funzioni analitiche, quindi di classe  $C^\infty$ . Ne segue che se  $t \mapsto A(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è un'applicazione  $C^\infty$ , allora anche  $t \mapsto e^{A(t)}$  è di classe  $C^\infty$ .

Si ha

$$(e^{tA})' = \frac{d}{dt} \sum \frac{t^n}{n!} A^n = \sum \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A e^{tA}.$$

**ATTENZIONE:** è generalmente falso che  $(e^{A(t)})' = A(t)' e^{A(t)}$ . Si consideri ad esempio la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(t)' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome  $A(t)^n = A(t)$  per ogni  $n > 0$  si ha

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} 1 & t(e-1) \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad (e^{A(t)})' = \begin{pmatrix} 0 & e-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = A(t)' e^{A(t)}.$$

**Lemma 13.1.** Se  $\|A\| < \log 2$  allora  $\log(e^A) = A$ . In particolare l'applicazione esponenziale è iniettiva in un intorno di 0.

*Dimostrazione.* La funzione  $\log(e^{tA}) = \log(1 - (1 - e^{tA})) = -\sum_{n>0} \frac{(1 - e^{tA})^n}{n}$  è derivabile per  $t \in [0, 1]$ , vale 0 per  $t = 0$  e la sua derivata è

$$\log(e^{tA})' = -\sum_{n \geq 0} -Ae^{tA}(1 - e^{tA})^n = Ae^{tA} \frac{1}{1 - (1 - e^{tA})} = A.$$

□

#### 14. LA FORMULA DI DERIVAZIONE

Vogliamo adesso trovare una formula per la derivata di  $e^{A(t)}$ ; supponiamo per semplicità che  $A(t)$  sia di classe  $C^\infty$  su un intervallo aperto  $U \subset \mathbb{R}$ , anche se il risultato vale in maggiore generalità. Abbiamo già osservato che anche  $e^{A(t)}$  è di classe  $C^\infty$  su  $U$ .

**Teorema 14.1.** *Sia  $A(t)$  una matrice a coefficienti funzioni  $C^\infty$  in un intervallo aperto  $U$ , allora vale la formula*

$$(e^{A(t)})'e^{-A(t)} = \frac{e^{\text{ad } A(t)} - 1}{\text{ad } A(t)} A(t)' = \sum_{m \geq 0} \frac{(\text{ad } A(t))^m A(t)'}{(m+1)!}.$$

Inoltre

$$A(t)' = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} (\text{ad } A(t))^m [(e^{A(t)})'e^{-A(t)}],$$

dove i  $B_m$  sono i numeri di Bernoulli.

*Dimostrazione.* Sia  $n > 0$  l'ordine della matrice  $A(t)$ ; indichiamo con  $H = C^\infty(U)$  l'algebra delle funzioni  $C^\infty$  su  $U$  e con  $H^n$  lo spazio vettoriale delle  $n$ -uple di funzioni  $C^\infty$ . Con il prodotto righe per colonna lo spazio  $M_n(H)$  è immerso in  $\text{End}(H^n)$ : anziché dimostrare che l'uguaglianza del teorema vale in  $M_n(H)$ , dimostriamo che vale nell'algebra associativa  $\text{End}(H^n)$ .

Lo spazio  $\text{End}(H^n)$  contiene anche l'operatore di derivazione  $D$ :

$$D(f_1, \dots, f_n) = (f_1', \dots, f_n'), \quad D \in \text{End}(H^n).$$

dalla regola di Leibniz segue che per ogni  $B(t) \in M_n(H)$  e per ogni  $F(t) \in H^n$  vale

$$D(B(t)F(t)) = B(t)'F(t) + B(t)D(F(t)),$$

e quindi vale  $B(t)' = [D, B(t)]$  in  $\text{End}(H^n)$ .

Dunque

$$e^{A(t)}De^{-A(t)} = \sum_{k, s \geq 0} \frac{A(t)^k}{k!} D \frac{(-A(t))^s}{s!},$$

ponendo  $m = k + s$  e applicando il Lemma 12.4 troviamo

$$\begin{aligned} e^{A(t)}De^{-A(t)} &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A(t)^k D(-A(t))^s = \sum_{m \geq 0} \frac{(\text{ad } A(t))^m}{m!} D = \\ &= D + \sum_{m \geq 0} \frac{(\text{ad } A(t))^m}{(m+1)!} [A(t), D] = D - \sum_{m \geq 0} \frac{(\text{ad } A(t))^m}{(m+1)!} A(t)'. \end{aligned}$$

Quindi

$$D - e^{A(t)}De^{-A(t)} = \sum_{m \geq 0} \frac{(\text{ad } A(t))^m}{(m+1)!} A(t)'$$

e moltiplicando a destra per  $e^{A(t)}$

$$(e^{A(t)})' = [D, e^{A(t)}] = \left( \sum_{m \geq 0} \frac{(\text{ad } A(t))^m}{(m+1)!} A(t)' \right) e^{A(t)}.$$

Ricordiamo che i numeri di Bernoulli  $B_m$  sono definiti dallo sviluppo in serie  $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} x^m$

e quindi l'operatore

$$\sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} (\text{ad } A(t))^m \in \text{End}(H^n)$$



è l'inverso di

$$\frac{e^{\text{ad } A(t)} - 1}{\text{ad } A(t)}.$$

Quindi

$$A(t)' = \left( \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} (\text{ad } A(t))^m \right) \frac{e^{\text{ad } A(t)} - 1}{\text{ad } A(t)} A(t)' = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} (\text{ad } A(t))^m [(e^{A(t)})' e^{-A(t)}].$$

□

### 15. LA FORMULA DI BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF

Siano  $A, C \in M_n(\mathbb{R})$ , allora per  $t, s \in \mathbb{R}$  sufficientemente vicini a 0 è ben definito  $\log(e^{tA} e^{sC})$ .

**Teorema 15.1.** *Nelle notazioni precedenti vale*

$$\log(e^{tA} e^{sC}) = \sum_{i+j>0} t^i s^j Z_{ij},$$

dove  $Z_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$  è un elemento di Lie di peso  $i + j$  dello spazio generato da  $A, C$ .

Seguirà dalla dimostrazione che gli elementi  $Z_{ij}$  si possono calcolare mediante una formula ricorsiva. I primi termini della serie (peso  $\leq 3$ ) sono:

$$\log(e^{tA} e^{sC}) = tA + sC + \frac{ts}{2}[A, C] + \frac{t^2 s}{12}[A, [A, C]] + \frac{ts^2}{12}[C, [C, A]] + \dots$$

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $Z = \log(e^{tA} e^{sC})$ , allora per il Lemma 13.1

$$e^Z = e^{tA} e^{sC}, \quad Z(0, s) = sC.$$

Derivando rispetto a  $t$  e applicando la formula di derivazione si ottiene

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} (\text{ad } Z)^m \left[ \frac{\partial e^Z}{\partial t} e^{-Z} \right]$$

e siccome

$$\frac{\partial e^Z}{\partial t} e^{-Z} = A e^{tA} e^{sC} e^{-sC} e^{-tA} = A$$

otteniamo

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} (\text{ad } Z)^m A.$$

Se scriviamo inoltre  $Z(t, s) = \sum_{m \geq 0} Z_m(s) t^m$  si ha  $Z_0 = sC$ ; eguagliando i coefficienti di  $t^0$  abbiamo

$$Z_1 = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} (\text{ad } Z_0)^m A = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m s^m}{m!} (\text{ad } C)^m A = A - \frac{s}{2}[C, A] + \frac{s^2}{12}[C, [C, A]] + \dots,$$

e più in generale, eguagliando i coefficienti di  $t^r$  si ha

$$Z_{r+1} = \frac{1}{r+1} \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} \sum_{i_1 + \dots + i_m = r} (\text{ad } Z_{i_1}) (\text{ad } Z_{i_2}) \dots (\text{ad } Z_{i_m}) A$$

Per concludere la dimostrazione bisogna dimostrare che il coefficiente di  $s^d$  in  $Z_r$  è di Lie di peso  $d + r$ . Per  $r = 0$  ci siamo; proseguiamo per induzione su  $r$ . Se scriviamo  $Z_i = \sum_j Z_{ij} s^j$  la precedente formula ricorsiva diventa

$$Z_{r+1,d} = \frac{1}{r+1} \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} \sum_{i_1 + \dots + i_m = r} \sum_{j_1 + \dots + j_m = d} (\text{ad } Z_{i_1 j_1}) (\text{ad } Z_{i_2 j_2}) \dots (\text{ad } Z_{i_m j_m}) A$$

ed ogni addendo  $(\text{ad } Z_{i_1 j_1}) (\text{ad } Z_{i_2 j_2}) \dots (\text{ad } Z_{i_m j_m}) A$  è di Lie di peso  $r + d + 1$ . □