SPE 2009: DISPENSE ED ESERCIZI

MARCO MANETTI

1. L'irrazionalità di π

Iniziamo con l'osservare che per ogni $n \geq 0$ il polinomio di grado $2n$

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

e tutte le sue derivate $f_n'(x)$, $f_n''(x)$,..., $f_n^{(h)}(x)$,... assumono valori interi per $x = 0, 1$.

Questo può essere dimostrato facilmente per induzione su n. Infatti $f_0 = 1$, mentre per $n > 0$ vale $f_n(0) = f_n(1) = 0$ e, ponendo $f_s = 0$ se $s < 0$ vale

$$f_n' = (1-2x)f_{n-1}\ , \quad f_n'' = -2f_{n-1} + (1-2x)^2 f_{n-2}\ , \quad \ldots\ f_n^{(h)}(x) = \sum_{i=1}^{h} p_{hi}(x) f_{n-h}(x)\ ,$$

dove ogni $p_{hi}(x)$ è un polinomio a coefficienti interi.

Esercizio 1 (L'irrazionalità di π^2)**.** Supponiamo per assurdo che $\pi^2 = a/b$, con a, b interi positivi. Dimostrare:

(1) Sia $f(x)$ un polinomio di grado $\leq 2n$ con la proprietà che $f(x)$ e tutte le sue derivate $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(h)}(x)$,... assumano valori interi per $x = 0, 1$. Utilizzare la formula di integrazione per parti e induzione su n per dimostrare che

$$\int_0^1 \pi a^n f(x) \sin(\pi x) dx \in \mathbb{Z}.$$

(2) Mostrare che per ogni $n > 0$ vale

$$0 < \int_0^1 \frac{\pi a^n}{n!} x^n (1-x)^n \sin(\pi x) dx < \frac{\pi a^n}{4^n n!}.$$

(3) Provare che per $n >> 0$ i punti precedenti portano ad una contraddizione.

2. Parentesi sui coefficienti binomiali

Per n, k interi non negativi, i coefficicnti binomiali $\binom{n}{k}$ sono definiti tramite l'uguaglianza

$$(1+x)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k.$$

Osserviamo immediatamente che $\binom{n}{k} = 0$ se $k > n$ e $\binom{n}{0} = 1$. Se $n > 0$, allora derivando rispetto ad x ambo i membri e dividendo per n si ottiene

$$\sum_{k>0} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

Date: novembre 2009.

ed eguagliando i coefficienti

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} \qquad \text{per } k > 0.$$

Usando questa formula si dimostra immediatamente per induzione su k che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Scrivendo invece $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$ si ricava invece la formula

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Esercizio 2. Se t è una variabile e d è un intero non negativo, si definsce il polinomio a coefficienti razionali

$$\binom{t}{0} = 1, \qquad \binom{t}{d} = \frac{1}{d!}\prod_{i=0}^{d-1}(t-i) \in \mathbb{Q}[t] \text{ per } d > 0.$$

Dimostrare che:

(1) Il polinomio $\binom{t}{d}$ ha grado d ed ha come radici i numeri interi compresi tra 0 e $d-1$.
(2) Valgono le formule

$$\binom{t}{d} = \frac{t}{d}\binom{t-1}{d-1}, \qquad \binom{t+1}{d} - \binom{t}{d} = \binom{t}{d-1}.$$

Esercizio 3. Un polinomio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ si dice un **polinomio numerico** se $p(n) \in \mathbb{Z}$ per ogni intero $n >> 0$. Provare che:

(1) I polinomi $\binom{t}{d}$, con $d \geq 0$, sono numerici.
(2) Se $p(t)$ è un polinomio numerico, allora $p(n) \in \mathbb{Z}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (Sugg.: il polinomio $q(t) = p(t+1) - p(t)$ è numerico.)
(3) Ogni polinomio numerico si scrive in modo unico come una combinazione lineare a coefficienti interi dei polinomi $\binom{t}{d}$, con $d \geq 0$.
(4) Con la relazione di ordine $p \geq q$ *se e solo se* $p(n) \geq q(n)$ *per* $n >> 0$, i polinomi numerici sono un insieme totalmente ordinato.

3. La formula di Wallis

Notazione. Se a_n, b_n sono due successioni di numeri reali positivi, scriveremo $a_n \sim b_n$ se vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Teorema 3.1 (John Wallis, 1656)**.** *Vale la formula*

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\ .$$

Dimostrazione. Per ogni intero $n \geq 0$ consideriamo l'integrale definito

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx\ .$$

Si ha $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$, mentre i valori I_n, $n \geq 2$, possono essere calcolati ricorsivamente mediante la formula di integrazione par parti: infatti

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx &= \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n-1}(x)dx \\ &= \left[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(x))\sin^{n-2}(x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

da cui segue la formula

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Essendo chiaramente $I_n \leq I_{n-1}$ per ogni n si ha che

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

e quindi il limite della successione I_{n+1}/I_n è uguale ad 1. Passando ad una sottosuccessione si ottiene in particolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1\ .$$

Per la formula ricorsiva

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}}{\frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}} = \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{I_{2n-3}}{I_{2n-4}} \frac{(2n-2)^2(2n)^2}{(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)} &= \\ = \frac{I_1}{I_0} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2(2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)(2n-1)^2(2n+1)} \end{aligned}$$

Passando al limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2(2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2(2n-1)^2(2n+1)} = \frac{I_0}{I_1} = \frac{\pi}{2}$$

e di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2(2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2(2n-1)^2\ n} = \pi\ , \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)\ \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}\ . \tag{2}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n) = 2^n n!$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

che equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

□

Esercizio 4. In questo esercizio proponiamo una dimostrazione dell'eguaglianza

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

che utilizza la formula di Wallis. Per ogni intero $n \geq 0$ indichiamo

$$G_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx, \qquad \Phi_n(t) = \int_0^{+\infty} (t+x)^2 x^n e^{-x^2}dx\ .$$

(1) Provare che $G_1 = 1/2$.
(2) Usare l'integrazione per parti per dimostrare che per ogni $n \geq 0$ vale

$$G_{n+2} = \frac{n+1}{2}G_n.$$

(3) Provare che

$$G_{2k+1} = \frac{k!}{2}, \qquad G_{2k+2} = \frac{2k+1}{2^{2k+1}}\frac{(2k)!}{k!}G_0.$$

(4) Provare che per ogni numero reale t ed ogni $n \geq 0$ vale

$$t^2G_n + 2tG_{n+1} + G_{n+2} \geq 0$$

e dedurre che $G_{n+1}^2 \leq G_nG_{n+2}$.
(5) Provare le diseguaglianze

$$G_{2k}^2 \leq G_{2k-1}G_{2k+1}, \qquad G_{2k+1}^2 \leq \frac{2k+1}{2}G_{2k}^2$$

e dedurre che

$$G_{2k}^2 \sim \frac{k!(k-1)!}{4}, \qquad G_{2k+2} \sim \frac{\sqrt{k+1}}{2}k!$$

(6) Usare la formula di Wallis per calcolare G_0.

Esercizio 5. (1) Provare che la successione $a_n = \binom{2n}{n}$ soddisfa l'equazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}a_n, \qquad a_0 = 1\ .$$

(2) Provare che la serie

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} t^n$$

converge assolutamente nell'intervallo $-1/4 < t < 1/4$.
(3) Provare che vale $(1-4t)f' = 2f$, $f(0) = 1$ e dedurre che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} t^n.$$

(4) Provare che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

(5) Sia

$$c_0 = 1, \qquad c_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{n+1/2}{n+1}.$$

Provare che

$$c_n \sim 1/\sqrt{\pi n}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

Esercizio 6. Sapendo che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = 1 + 2t + 6t^2 + \cdots$$

dimostrare che

$$\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n = 1 + t + 2t^2 + \cdots$$

(Suggerimento: derivare le funzioni $\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} t^{n+1}$.)

4. La trascendenza di e

La serie esponenziale è per definizione

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

sappiamo che la funzione $e^{x+y} = e^x e^y$ e che $(e^x)' = e^x$. Il valore di tale serie per $x = 1$ è il *numero di Eulero* e

$$e = e^1 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}.$$

La serie logaritmica

$$\log(1+x) = \sum_{n>0} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

converge assolutamente per $|x| < 1$ e

$$\log(1+x) = \sum_{n>0} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Sappiamo che $\log(e^x) = x$ e $e^{\log(1+y)} = 1 + y$ per $|y| < 1$ e $e^x < 2$.

Esercizio 7 (L'irrazionalità di e^r)**.** Sia r un intero positivo e supponiamo per assurdo che $e^r = a/b$, con a, b interi positivi. Dimostrare:

(1) Sia $f(x)$ un polinomio di grado $\leq n$ con la proprietà che $f(x)$ e tutte le sue derivate $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(h)}(x)$,... assumano valori interi per $x = 0, 1$. Utilizzare la formula di integrazione per parti e induzione su n per dimostrare che

$$\int_0^1 br^n e^{rx} f(x) dx \in \mathbb{Z}.$$

(2) Mostrare che per ogni $n > 0$ vale

$$0 < \int_0^1 \frac{br^{2n}}{n!} x^n (1-x)^n e^{rx} dx < \frac{ar^{2n}}{4^n n!}.$$

(3) Provare che per $n >> 0$ i punti precedenti portano ad una contraddizione.

Esercizio 8 (Polinomi di Hermite)**.** Dato un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$, denotiamo con $f^{(i)}$ la sua derivata i-esima rispetto a x. Per ogni intero positivo n e per ogni numero primo $p > n$ siano

$$f_{n,p}(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \prod_{h=1}^{n} (h-x)^p, \qquad F_{n,p}(x) = \sum_{i\geq 0} f_{n,p}^{(i)}(x) \in \mathbb{Q}[x].$$

Si noti che $F_{n,p} - F'_{n,p} = f_{n,p}(x)$. Si provi che:

(1) $F_{n,p}(0)$ è un intero non divisibile per p.
(2) Per ogni $h = 1, \ldots, n$, il numero intero $F_{n,p}(h)$ è divisibile per p.

(3) Sia $x \in \mathbb{R}$, allora
$$F_{n,p}(x) = \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{h} \frac{x^j}{j!} f_{n,p}^{(h)}(0).$$
(Sugg.: sviluppo di Taylor.)

Esercizio 9 (La trascendenza di e)**.** Si provi:

(1) $|f^{(i)}(0)| \leq i!\|f\|$.
(2) $\|f^i\| \leq \|f\|^i$.
(3) Per ogni n fissato esiste una costante C tale che $\|f_{n,p}\| \leq \dfrac{C^p}{(p-1)!}$.
(4) Per ogni n fissato e per ogni $h = 1, \dots, n$, vale
$$\lim_{p \to +\infty} (F_{n,p}(h) - e^h F_{n,p}(0)) = 0.$$
(Sugg.: scrivere lo sviluppo in serie di e^h e usare il punto 3) dell'Esercizio 8.)

Dal punto 4) e dall'Esercizio 8 si può facilmente dedurre che e è trascendente. Sia infatti per assurdo $a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$; si ponga $F_p = F_{n,p}$ e si consideri il limite per $p \to +\infty$ di
$$\sum_{h=1}^{n} a_h (F_p(h) - e^h F_p(0)) \equiv a_0 F_0(p) \qquad (\text{mod } p).$$

5. Permutazioni senza punti fissi

Indichiamo con d_n, $n > 0$, il numero di permutazioni σ di $\{1, \dots, n\}$ senza punti fissi, ossia tali che $\sigma(i) \neq i$ per ogni i. Vogliamo dimostrare che
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{d_n} = e.$$
Poniamo per convenzione $d_0 = 1$. Una permutazione di $\{1, \dots, n\}$ è univocamente determinata dal sottoinsieme dei suoi punti fissi e da una permutazione senza punti fissi del complementare. Ciò significa che per ogni k con $0 \leq k \leq n$ il numero di permutazioni con k punti fissi è uguale a
$$D_n(k) = \binom{n}{k} d_{n-k}.$$
Sommando per $k = 0, \dots, n$ si ottiene quindi
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k$$
e dividendo per $n!$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = 1.$$
Consideriamo la funzione
$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} t^n \ ,$$
allora
$$f(t)e^t = (\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} t^n)(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n) = \sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}) t^n = \sum_{n \geq 0} t^n = \frac{1}{1-t}$$
da cui
$$f(t) = \frac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}) t^n.$$

e quindi

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \qquad \lim_n \frac{d_n}{n!} = \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$$

Esercizio 10. Nelle notazioni precedenti mostrare che

$$\sum_{n,k} \frac{D_n(k)}{n!} x^n y^k = \frac{e^{-x}}{1-x} e^{xy}.$$

Per ogni numero reale $r > 0$ calcolare il limite per $n \to \infty$ di

$$c_n = \sum_k \frac{D_n(k)}{n!} r^k.$$

Esercizio 11. Trovare una formula per i termini della successione a_n definita dalla relazione ricorsiva

$$(n+1)a_{n+1} = 3a_n + \frac{1}{n!}, \qquad n \ge 0,\ a_0 = 1.$$

(Sugg.: provare che la funzione generatrice $f(t) = \sum a_n t^n$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$f' = 3f + e^t, \qquad f(0) = 1,$$

e quindi che $f(t) = (3e^{3t} - e^t)/2$.)

6. La formula di Stirling

Lemma 6.1. *Si consideri la successione*

$$d_n = \log(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log(n) + n, \qquad n > 0.$$

Esiste allora il limite $\lim_{n\to\infty} d_n = d$ *e per ogni* $n > 0$ *valgono le disuguaglianze*

$$d + \frac{1}{12n + \frac{6}{10n+5}} \le d_n \le d + \frac{1}{12n}.$$

Dimostrazione. Per ogni $n > 0$ si ha

$$d_n - d_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\ .$$

Denotando $t = (2n+1)^{-1}$ si ha $0 < t \le 1/3$ e

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 = \frac{1}{2t}\left(\log(1+t) - \log(1-t)\right) - 1\ .$$

Gli sviluppi di Taylor

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$$
$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$$

sono convergenti per $0 < t < 1$ e quindi

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t}\left(2t + 2\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + \cdots\right) - 1 = \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \cdots$$

Siccome $3^{n-2}(2n+1) \le 5^{n-1}$ per ogni $n > 0$ si ha

$$d_n - d_{n+1} \ge \frac{5}{9}\left(\frac{3t^2}{5} + \frac{9t^4}{25} + \left(\frac{3t^2}{5}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{1}{3}\frac{t^2}{1 - \frac{3t^2}{5}} = \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2 - \frac{3}{5}}$$

e la serie d_n è monotona decrescente. Inoltre

$$d_n - d_{n+1} = \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \cdots \le \frac{1}{3}(t^2 + t^4 + t^6 + \cdots) = \frac{1}{3}\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{t^{-2} - 1}$$

e ricordando che $t^{-1} = 2n+1$ si ha

$$d_n - d_{n+1} \le \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{12}\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

Se definiamo $c_n = d_n - \frac{1}{12n}$, abbiamo appena dimostrato che $c_n - c_{n+1} \le 0$, e quindi che per ogni $n > 0$

$$c_n \le c_{n+1} \le d_{n+1} \le d_n.$$

Dunque la successione d_n è decrescente limitata e dunque ammette limite finito d. Per ogni n si ha $d_n \ge d \ge c_n = d_n - \frac{1}{12n}$.

Poi abbiamo

$$\begin{aligned}
d_n - d = \sum_{k=0}^{+\infty} d_{n+k} - d_{n+k+1} &\ge \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2(n+k)+1)^2 - \frac{3}{5}} \\
&\ge \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2(n+k)+\frac{1}{10n+5}\right)\left(2(n+k+1)+\frac{1}{10n+5}\right) - \frac{4k}{10n+5}} \\
&\ge \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2(n+k)+\frac{1}{10n+5}\right)\left(2(n+k+1)+\frac{1}{10n+5}\right)} \\
&\ge \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2(n+k)+\frac{1}{10n+5}} - \frac{1}{2(n+k+1)+\frac{1}{10n+5}} = \frac{1}{12n+\frac{6}{10n+5}}
\end{aligned}$$

□

Esponenziando le disuguaglianze del Lemma 6.1 otteniamo

$$e^d e^{\frac{1}{12n+\frac{6}{10n+5}}} \le e^{d_n} = \frac{e^n\, n!}{n^n\sqrt{n}} \le e^d e^{\frac{1}{12n}},$$

e passando al limite per $n \to \infty$

$$n! \sim e^d\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}.$$

Immettiamo questa stima asintotica nella formula di Wallis

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{e^d\sqrt{2n}(2n/e)^{2n}}{e^{2d}n(n/e)^{2n}} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{e^d\sqrt{n}}$$

e otteniamo il valore $e^d = \sqrt{2\pi}$. Abbiamo quindi dimostrato il seguente risultato.

Teorema 6.2 (Cesàro, 1922)**.** *Per ogni intero positivo n valgono le disuguaglianze*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+\frac{6}{10n+5}}} \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Corollario 6.3 (Formula di Stirling, 1750)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}.$$

Osservazione 6.4. Siccome $(a-b)^{-1} \ge a^{-1} + ba^{-2}$ per ogni $a > b > 0$, la dimostrazione del Lemma 6.1 implica che

$$d_n - d \ge \frac{1}{12n+\frac{6}{10n+5}} + \frac{1}{3(10n+5)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4k}{\left(2(n+k)+\frac{1}{10n+5}\right)^2\left(2(n+k+1)+\frac{1}{10n+5}\right)^2}$$

e questo può essere usato per migliorare la stima del Teorema 6.2.

Esercizio 12. Provare che la serie

$$\sum_{n>0} \binom{3n}{n} t^n$$

converge per $0 \leq t < 4/27$ e diverge per $t = 4/27$.

Soluzione. Che il raggio di convergenza è $4/27$ segue facilmente dal criterio del rapporto. Applicando la formula di Stirling si ha

$$\binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \sim \frac{\sqrt{6n\pi}3^{3n}}{\sqrt{2n\pi}\sqrt{4n\pi}\,2^{2n}} = \sqrt{\frac{3}{4n\pi}}\frac{27^n}{4^n}.$$

Quindi per $n >> 0$ si ha $\binom{3n}{n}\dfrac{4^n}{27^n} \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{4n\pi}}$ e basta osservare che la serie $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente.

Osservazione 6.5. Il fatto che il raggio di convergenza sia $4/27$ implica che la serie non convege per $t > 4/27$ ma non dice nulla di cosa succede per $t = 4/27$. Ad esempio la serie

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}\binom{3n}{n} t^n$$

ha lo stesso raggio di convergenza e converge per $t = 4/27$.

7. Numeri di Fibonacci

In risposta ad un problema pratico di coniglicoltura, Leonardo Pisano (1170-1250), detto Fibonacci, scrive nel suo Liber Abaci la successione

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.$$

In linguaggio moderno si definisce la successione dei *numeri di Fibonacci* tramite la formula ricorsiva

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 1.$$

Esercizio 13. Mostrare che per ogni intero positivo n si ha:

(1) $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$,
(2) $F_3 + \cdots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$,
(3) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

(Sugg.: induzione su n.)

Esercizio 14. Per ogni intero positivo N definiamo $z(N) = \max\{n \mid F_n \leq N\}$. Provare che $z(N - F_{z(N)}) \leq z(N) - 2$.

Esercizio 15 (Teorema di Zeckendorf)**.** Mostrare che per ogni intero positivo N esiste una unica successione $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di interi maggiori di 1 tali che:

(1) $a_{i+1} \geq a_i + 2$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$,
(2) $N = F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_n}$.

Esercizio 16. Mostrare che per ogni $a, n \geq 1$ vale la formula

$$F_nF_a + F_{n-1}F_{a-1} = F_{n+a-1}.$$

(Sugg.: vero per $a = 1, 2$; induzione su a.)

Esercizio 17. (1) Mostrare che F_n e F_{n+1} non hanno fattori comuni.
(2) Usare il risultato dell'Esercizio 16 per mostrare che il massimo comune divisore di F_a, F_b è uguale al massimo comune divisore di F_a, F_{a+b}.
(3) Mostrare che $MCD(F_a, F_b) = F_{MCD(a,b)}$.

Dati due numeri reali a, b, con $a \neq b$, si ha, per ogni $n > 0$ la relazione
$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = (a+b)\frac{a^n-b^n}{a-b} - ab\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}.$$
Dunque, se poniamo
$$A_n = \frac{a^n-b^n}{a-b}$$
vale
$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_{n+1} = (a+b)A_n - abA_{n-1}.$$
Siano
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
i due numeri reali tali che
$$x+y = 1, \qquad xy = -1, \qquad (1-xt)(1-yt) = 1-t-t^2.$$
Allora, se poniamo
$$F_n = \frac{x^n-y^n}{x-y}.$$
si ha
$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$
e ritroviamo la successione dei numeri di Fibonacci.

La formula precedente può essere anche essere dimostrata usando la serie generatrice dei numeri di Fibonacci:
$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \cdots = t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + \cdots$$
Moltiplichiamo $F(t)$ per $1-t-t^2$:
$$(1-t-t^2)F(t) = (1-t-t^2)(F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \cdots) =$$
$$= F_0 + (F_1 - F_0)t + (F_2 - F_1 - F_0)t^2 + \cdots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})t^n + \cdots = t.$$
Si ha dunque
$$F(t) = \frac{t}{1-t-t^2} = \frac{1}{x-y}\left(\frac{1}{1-xt} - \frac{1}{1-yt}\right).$$
Basta adesso osservare che
$$\frac{1}{1-xt} = 1 + xt + x^2t^2 + \cdots, \qquad \frac{1}{1-yt} = 1 + yt + y^2t^2 + \cdots$$
Usando le stessa idea si può invece considerare
$$F(t) = \frac{t}{1-t(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}(1+t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}t^{n+a+1}.$$
da cui segue la formula
$$F_{n+1} = \sum_{a\geq 0}\binom{n-a}{a}.$$
Consideriamo le due serie
$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}t^n = F_0 + F_2 t + F_4 t^2 + \cdots$$
$$D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}t^n = F_1 + F_3 t + F_5 t^2 + \cdots$$
Per l'Esercizio 13 si ha:
$$\frac{P(t)}{1-t} = F_0 + (F_0 + F_2)t + (F_0 + F_2 + F_4)t^2 + \cdots = D(t) - \frac{1}{1-t}.$$

$$\frac{D(t)}{1-t} = F_1 + (F_1 + F_3)t + (F_1 + F_3 + F_5)t^2 + \cdots = \frac{P(t)}{t}.$$

Da cui si ricava

$$\frac{tD(t)}{(1-t)^2} = \frac{P(t)}{1-t} = D(t) - \frac{1}{1-t}.$$

$$D(t)\left(1 - \frac{t}{(1-t)^2}\right) = \frac{1}{1-t},$$

$$D(t) = \frac{1-t}{1-3t+t^2}, \qquad P(t) = \frac{t}{1-3t+t^2}.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare partendo dalle uguaglianze

$$F(t) + F(-t) = 2P(t^2), \qquad F(t) - F(-t) = 2tD(t^2), \qquad F(t) = \frac{t}{1-t-t^2}.$$

Consideriamo la successione $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5, \ldots$ definita per ricorrenza

$$u_0 = 0; \qquad u_n - 1 = \sum_{i=0}^{n}(n-i)u_i\,, \qquad \forall n \geq 1.$$

Consideriamo la serie generatrice $U(t) = u_0 + u_1 t + \cdots$. Siccome vale

$$\frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + \cdots$$

si ha

$$\frac{tU(t)}{(1-t)^2} = U(t) - \frac{t}{1-t}.$$

da cui $U(t) = tD(t)$ e quindi $u_n = F_{2n-1}$ per ogni n. Abbiamo quindi trovato che per ogni $n \geq 1$ vale

$$F_{2n+1} - 1 = \sum_{i=0}^{n}(n-i)F_{2i+1}.$$

Tale uguaglianza si può verificare facilmente per induzione su n. Infatti vale

$$F_3 - 1 = 1 = (1-0)F_1, \qquad F_5 - 1 = 4 = 2 + 2 = (2-0)F_1 + (2-1)F_3\,,$$

e per induzione

$$F_{2n+1} - 1 = F_{2n} + (F_{2(n-1)+1} - 1) =$$
$$= (F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}) + \sum_{i=0}^{n-1}(n-1-i)F_{2i+1} = \sum_{i=0}^{n}(n-i)F_{2i+1}.$$

Esercizio 18. Si consideri la successione a_n:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}\,.$$

Calcolare il valore della serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{3^n}\,.$$

Soluzione. Consideriamo la funzione generatrice $A(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$. Allora

$$A(t) - tA(t) - 2t^2 A(t) = a_1 t + \sum_{n\geq 2}(a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2})t^n = t$$

e quindi come serie formale

$$A(t) = \frac{t}{1-t-2t^2} = \frac{t}{(1+t)(1-2t)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1+t}\right).$$

Dunque il raggio di convergenza della serie è $1/2$ e per ogni $r \in (-1/2, 1/2)$ si ha

$$\sum a_n r^n = \frac{r}{1-r-2r^2}\,.$$

In particolare

$$\sum \frac{a_n}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3-2/9} = 3/4\ .$$

Esercizio 19. Si consideri la successione $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{e^n}$.

8. Sviluppi in serie notevoli

Elenchiamo alcuni sviluppi in serie più o meno noti:

- $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$,
- $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$,
- $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$,
- $\frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nt^n$,
- $\frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} t^n$
- $\tan^{-1} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$,
- $\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = 1 + 2t + 6t^2 + 20t^3 + 70t^4 + 252t^5 + 924t^6 + 3432t^7 + \cdots$
- $\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} t^n = 1 + t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 42t^5 + 132t^6 + \cdots$
- $\frac{1}{\sqrt{1-4t}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+k}{n} t^n$

Se $z \in \mathbb{C}$ è un qualunque numero complesso e $d \in \mathbb{N}$ si pone per definizione

$$\binom{z}{d} = \frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (z-i) \in \mathbb{C}.$$

Se z è un intero non negativo tale definizione coincide con quella combinatoria. Si dimostra subito che

$$\binom{z}{d} = (-1)^d \binom{d-1-z}{d}.$$

Segue dalla formula di Taylor che

- $\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} t^n = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} + \frac{7t^5}{256} - \cdots$

e più in generale per ogni numero reale α vale

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n-1-\alpha}{n} t^n = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} t^3 + \cdots$$

Esercizio 20. 1) Mostrare che per ogni coppia di interi a, b, con $0 \leq a \leq b$ vale

$$\sum_n \binom{n+a}{b} t^n = \frac{t^{b-a}}{(1-t)^{b+1}}.$$

2) Calcolare, per ogni $n \geq 0$, il numero $a_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}$. (Suggerimento: scrivere la serie generatrice $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, invertire l'ordine di sommatoria e semplificare.)

Esercizio 21. Mostrare che per ogni $m \geq 0$ vale

$$\sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} x^n = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k x^n.$$

Quindi per ogni $n, m \geq 0$ vale l'identità binomiale

$$\sum_{k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k.$$

(Suggerimento:

$$\sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} x^n = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} \frac{1}{x^k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{m} x^{n+k},$$

$$\sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k x^n = \sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k} 2^k \left(\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} x^n \right).$$

Esercizio 22. Provare:

$$2\sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{2k} = (1+x)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1};$$

$$2\sum_m \binom{2m+1}{2n} x^{2m} = \frac{x^{2n-1}}{(1-x)^{2n+1}} - \frac{x^{2n-1}}{(1+x)^{2n+1}};$$

Calcolare

$$2\sum_{k,m} \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} x^{2m}$$

e dedurre l'identità di Graham and Riordan

$$\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}.$$

Esercizio 23. Siano $f(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $f(1) \neq 0$, d un intero ≥ 0 e consideriamo la serie

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{d+1}} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Provare che esiste un polinomio numerico $p(t)$ di grado d tale che $p(n) = a_n$ per ogni $n >> 0$. Mostrare inoltre che

$$p(t) = \frac{f(1)}{d!} t^d + \text{termini di grado inferiore}.$$

Esercizio 24. Dimostrare che per ogni coppia n, m di interi non negativi vale la formula

$$n!\, m! = (n+m+1)! \int_0^1 x^n (1-x)^m dx.$$

(Sugg.: induzione su m ed integrazione per parti.)

Esercizio 25. Sia m un intero positivo, provare che

$$\sum_{n\ge m}\frac{(n-m)!}{n!}t^n=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(1-t)^{m-1}\log(1-t)+q(t)$$

con $q(t)$ polinomio di grado $< m$.

Soluzione. Sia

$$g(t)=(m-1)!\sum_{n\ge m}\frac{(n-m)!}{n!}t^n.$$

Per l'Esercizio 24 si ha

$$g(t)=\sum_{n\ge m}t^n\int_0^1 x^{n-m}(1-x)^{m-1}dx.$$

Considerando lo sviluppo del binomio

$$(1-x)^{m-1}=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}x^i$$

otteniamo

$$g(t)=\sum_{n\ge m}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}t^n\int_0^1 x^{n-m+i}dx=\sum_{n\ge m}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}\frac{t^n}{n-m+i+1}$$

$$g(t)=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}t^{m-i-1}\sum_{n\ge m}\frac{t^{n-m+i+1}}{n-m+i+1}=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}t^{m-i-1}(-\log(1-t)+h_i(t))$$

dove h_i è un polinomio in t di grado i.

$$g(t)=(-1)^m\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1}\binom{m-1}{i}t^{m-i-1}(\log(1-t)-h_i(t))=(-1)^m(1-t)^{m-1}\log(1-t)+h(t)$$

con h polinomio in t di grado $< m$.

Allo stesso risultato si può arrivare osservando che per ogni $h\le m$ la derivata h-esima di $x^m\log(x)$ è uguale a

$$\frac{m!}{(m-h)!}x^{m-h}\log(x)+\text{polinomio di grado }\le m-h.$$

e quindi che $(x^m\log(x))^{(m+1)}=\dfrac{m!}{x}$.

9. La derivata logaritmica

Supponiamo di avere una funzione sviluppabile in serie di Taylor

$$f(t)=\sum_{n\ge 0}a_nt^n$$

e tale che $a_0>0$. Un modo per trovare relazioni tra i coefficienti a_n è quello di considerare la derivata del logaritmo di entrambi i membri, ossia considerare l'equazione

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{\sum_{n>0}na_nt^{n-1}}{\sum_{n\ge 0}a_nt^n}\ .$$

Vediamo un esempio: abbiamo già osservato che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}}=\sum_{n\ge 0}\binom{2n}{n}t^n.$$

La derivata logaritmica è

$$\frac{\frac{2}{\sqrt[3]{1-4t}}}{\frac{1}{\sqrt{1-4t}}} = \frac{2}{1-4t}$$

e quindi

$$\sum_{n\geq 1} n\binom{2n}{n} t^{n-1} = \frac{2}{1-4t}\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}t^n = 2(\sum_{k\geq 0}4^k t^k)(\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}t^n)$$

da cui

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2i}{i}4^{n-i}.$$

Esercizio 26. Trovare una formula ricorsiva per i coefficienti dello sviluppo in serie di e^{e^t} (Suggerimento: derivata logaritmica).

Esercizio 27. Sia

$$e^{x+x^2} = \sum a_n x^n = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \cdots .$$

Mostrare che

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 2a_{n-2}}{n}$$

per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 28. Sia a_n una successione di interi e siano p, q interi positivi senza fattori comuni. Provare che p divide il coefficiente di t^q nella serie formale

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)^p .$$

Soluzione. Se $p = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $p > 1$ e scriviamo

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)^p = \sum_{m\geq 0} b_m t^m.$$

Derivando si ottiene

$$p\left(\sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1}\right)\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)^{p-1} = \sum_{m\geq 0} m b_m t^{m-1}$$

e siccome i coefficienti della serie

$$\left(\sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1}\right)\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)^{p-1}$$

sono interi ne consegue che p divide mb_m per ogni m.

Esercizio 29. Si considerino i polinomi $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ definiti dalla relazione

$$1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t)\cdots(1 + x_n t);$$

$$\sigma_1 = \sum_i x_i \ , \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j \ , \quad \ldots \quad \sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n \ .$$

Per ogni $d \geq 0$ si consideri inoltre il polinomio

$$\psi_0 = n, \qquad \psi_d = x_1^d + \cdots + x_n^d \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n].$$

Dimostrare:

(1) Ogni ψ_d è un polinomio a coefficienti interi nei σ_j. Ad esempio $\psi_1 = \sigma_1$, $\psi_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ eccetera. Suggerimento: cosiderare l'espressione (derivata logaritmica)

$$\frac{\frac{d}{dt}(1+\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)}{1+\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n}.$$

(2) Ogni σ_d è un polinomio a coefficienti razionali nei ψ_j. Ad esempio $\sigma_2 = \dfrac{\psi_1^2 - \psi_2}{2}$. Suggerimento:

$$\exp(\log(1+\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)) = ?$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\log(1+\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n) &= \log((1+x_1 t)(1+x_2 t)\cdots(1+x_n t))\\ &= \sum_{i=1}^n \log(1+x_i t) = \sum_{i=1}^n \sum_{d>0} (-1)^d x_i^d \frac{t^d}{d} = \sum_{d>0}(-1)^d \psi_d \frac{t^d}{d}\end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$\frac{\frac{d}{dt}(1+\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)}{1+\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n} = \sum_{d>0}(-1)^d \psi_d t^{d-1}$$

e quindi $(-1)^d\psi_d$ è il coefficiente di t^{d-1} nella serie

$$(\sigma_1 + 2\sigma_2 t + \cdots + n\sigma_m t^{n-1})\left(\sum_{h\geq 0}(-1)^h(\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)^h\right).$$

Viceversa

$$1+\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n = \exp(\log(1+\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)) = \exp\left(\sum_{d>0}(-1)^d \psi_d \frac{t^d}{d}\right)$$

e quindi σ_i è il coefficiente di t^i nella serie

$$\sum_{h\geq 0}\frac{1}{h!}\left(\sum_{d>0}(-1)^d\psi_d\frac{t^d}{d}\right)^h.$$

Esercizio 30. Sia $n > 0$ intero fissato. Il *numero di inversioni* di una permutazione σ di $\{1,\ldots,n\}$ è il numero di coppie (i,j) con $1 \leq i < j \leq n$ tali che $\sigma(i) > \sigma(j)$. Indichiamo con I_k , $0 \leq k \leq n(n-1)/2$ il numero di permutazioni che hanno k inversioni. Dimostrare che

$$\sum_k I_k x^k = \prod_{i=2}^n \frac{x^i - 1}{x-1}.$$

10. Numeri di Bell

Dato un intero $n > 0$ si definisce $b(n)$ come il numero di relazioni di equivalenza possibili nell'insieme $\{1,\ldots,n\}$. I numeri $b(n)$ vengono detti *numeri di Bell*; $b(1) = 1$, $b(2) = 2$, $b(3) = 5$ eccetera. Si pone inoltre per convenzione $b(0) = 1$.

Lemma 10.1. *Per ogni $n \geq 0$ vale la formula ricorsiva*

$$b(n+1) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} b(s).$$

Dimostrazione. Basta mostrare che il numero di relazioni di equivalenza su $\{0, 1, \ldots, n\}$ in cui la classe di equivalenza di 0 contiene $n - s + 1$ elementi, con $0 \le s \le n$, è uguale a $\binom{n}{s} b(s)$.

Ogni tale relazione è univocamente determinata da un sottoinsieme $S \subset \{1, \ldots, n\}$ di cardinalità s e da una relazione di equivalenza su S. Gli elementi del complementare di S saranno quelli equivalenti a 0. $\square$

Esercizio 31. Provare per induzione su n che $b(n) \le n!$.

Teorema 10.2. *Nelle notazioni precedenti, e con la convenzione che* $0^0 = 1$*, vale*

$$\sum_{n\ge 0} \frac{b(n)}{n!} x^n = e^{e^x - 1} \qquad e \qquad b(n) = \frac{1}{e} \sum_{r\ge 0} \frac{r^n}{r!} \qquad \textit{per ogni } \ n \ge 0\ .$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su n che vale la formula $b(n) = \frac{1}{e}\sum_{r\ge 0} \frac{r^n}{r!}$. Si ha $b(0) = 1 = \frac{1}{e}\sum_{r\ge 0}\frac{1}{r!}$, mentre per il Lemma 10.1 si ha

$$\begin{aligned} b(n+1) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} b(s) &= \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{n} \sum_{r\ge 0} \binom{n}{s} \frac{r^s}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r\ge 0} \frac{1}{r!} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} r^s \\ &= \frac{1}{e} \sum_{r\ge 0} \frac{1}{r!}(1+r)^n = \frac{1}{e} \sum_{r\ge 0} \frac{(1+r)^{n+1}}{(r+1)!} = \frac{1}{e} \sum_{r\ge 1} \frac{r^{n+1}}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r\ge 0} \frac{r^{n+1}}{r!}. \end{aligned}$$

La serie generatrice $F(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{b(n)}{n!} x^n$ è convergente in un intorno di 0, si ha $B(0) = b(0) = 1$ e

$$F(x)' = \sum_{n\ge 0} b(n+1) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\ge 0} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} b(s) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\ge 0} \sum_{s=0}^{n} b(s) \frac{x^s}{s!} \frac{x^{n-s}}{(n-s)!} = B(x) e^x.$$

Il problema di Cauchy

$$F(x)' = e^x F(x), \qquad B(0) = 1,$$

ha come soluzione $B(x) = e^{e^x - 1}$. $\square$

Notiamo che

$$\sum_{n\ge 0} b(n) \frac{x_n}{n!} = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{r\ge 0} \frac{e^{rx}}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r\ge 0} \sum_{n\ge 0} \frac{r^n x^n}{n! r!} = \sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n!} \left(\frac{1}{e} \sum_{r\ge 0} \frac{r^n}{r!} \right).$$

e quindi che le due uguaglianze del teorema sono una conseguenza dell'altra.

Esercizio 32. Si consideri la successione di polinomi

$$S_0(x) = 1, \qquad S_{n+1}(x) = x(S_n(x) + S_n(x)') = xe^{-x}(S_n(x)e^x)'.$$

Dimostrare che $S_n(1) = b(n)$. I coefficienti di tali polinomi

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k$$

si chiamano *numeri di Stirling di seconda specie*. Dimostrare che, ponendo $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ per $k < 1$ e $k > n$, si hanno le formule

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \qquad \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\},$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1, \qquad \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}.$$

Mostrare inoltre che $\left\{ {n \atop k} \right\}$ è uguale al numero di relazioni di equivalenza di $\{1, \ldots, n\}$ con k classi di equivalenza (Sugg.: ragionamento analogo al Lemma 10.1).

Teorema 10.3. *Dati due interi positivi n, k, il numero*

$$W_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n$$

è uguale al numero di applicazioni surgettive $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$. *In particolare $W_{n,k} = 0$ per ogni $k > n$.*

Dimostrazione. Definiamo

$$X = \{(S, f) \mid S \subset \{1, \ldots, k\}, \quad f : \{1, \ldots, n\} \to S\},$$

allora

$$W_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n = \sum_{(S,f)\in X} (-1)^{k-|S|},$$

dove $|S|$ indica la cardinalità dell'insieme S. Possiamo scrivere anche

$$W_{n,k} = \sum_{f} W_{n,k}(f), \quad \text{dove} \quad W_{n,k}(f) = \sum_{S : Im(f) \subset S} (-1)^{k-|S|}.$$

È chiaro che se f è surgettiva allora $W_{n,k}(f) = 1$. Basta quindi dimostrare che che se f non è surgettiva, allora $W_{n,k}(f) = 0$. Supponiamo che $|Im(f)| = s$ con $s < k$, allora per ogni $s \le r \le k$ il numero di sottoinsiemi $S \subset \{1, \ldots, k\}$ di cardinalità r che contengono $Im(f)$ è $\binom{k-s}{r-s}$ e quindi

$$W_{n,k}(f) = \sum_{r=s}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k-s}{r-s} = \sum_{i=0}^{k-s} (-1)^{k-s-i} \binom{k-s}{i} = (1-1)^{k-s} = 0.$$

□

Con la convenzione che $0^0 = 1$ si ha inoltre $W_{0,0} = 1$ e $W_{n,0} = W_{0,k} = 0$ per ogni $k, n > 0$.

Esercizio 33. Dimostrare che $W_{n,k} = \left\{ {n \atop k} \right\} k!$.

Esercizio 34. Utilizzare il Teorema 10.3 per calcolare i numeri di Stirling di seconda specie e per dare una dimostrazione alternativa del Teorema 10.2.

11. Numeri di Bernoulli

I *numeri di Bernoulli* B_n, $n \ge 0$, sono definiti mediante la loro EGF (exponential generating function)

$$B(x) = \sum_{n \ge 0} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1} .$$

Osservazione 11.1. Mostreremo nella Sezione 12 che per ogni $n \ge 0$ vale $|B_n| \le \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{n!}{(2\pi)^n}$, mentre per ogni n pari vale $|B_n| \ge \dfrac{n!}{(2\pi)^n}$. In particolare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n\ge 0} \frac{B_n}{n!} x^n$ è 2π. Il valore del raggio di convergenza si può calcolare in maniera semplice utilizzando la teoria delle funzioni olomorfe (insegnamento di variabile complessa).

Teorema 11.2. *Vale la formula*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1}.$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che la funzione generatrice

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1}$$

è uguale a $t/(e^t-1)$. Siccome $W_{n,k}=0$ se $n<k$ possiamo scrivere

$$f(t) = \sum_{n,k\geq 0} (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1} \frac{t^n}{n!},$$

che per il Teorema 10.3 diventa

$$f(t) = \sum_{n,k\geq 0} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{1}{k+1} \binom{k}{r} r^n \frac{t^n}{n!}.$$

Sommando su n si ha allora

$$f(t) = \sum_{k\geq 0} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{1}{k+1} \binom{k}{r} \sum_{n\geq 0} r^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^r}{k+1} \binom{k}{r} e^{rt} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} (1-e^t)^k.$$

Quindi

$$((1-e^t)f(t))' = -e^t \sum_{k\geq 0} (1-e^t)^k = \frac{-e^t}{1-(1-e^t)} = -1,$$

da cui segue

$$(1-e^t)f(t) = -t, \qquad f(t) = \frac{t}{e^t-1}.$$

□

Esercizio 35. Calcolare $B(x)-B(-x)$ e dedurre che $B_n=0$ per ogni n dispari maggiore di 2.

Esercizio 36. Mostrare che $B(x)e^x = B(-x)$ e dedurre che per ogni $n\geq 1$ vale

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0\,, \qquad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

$$B_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2k} B_{2k}.$$

Utilizzate tali formule per provare che

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=-\frac{1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66}.$$

Per ogni $n\geq 0$ indichiamo con $g_d(n) = 0^d+1^d+2^d+\cdots+(n-1)^d$. Si ha $g_0(n)=n$, $g_1(n)=n(n-1)/2$ eccetera.

Esercizio 37. Provare che

$$\sum_{d\geq 0} \frac{g_d(n)}{d!} x^d = \sum_{h=0}^{n-1} e^{hx} = \sum_{h=0}^{n-1} (e^x)^h = \frac{e^{nx}-1}{x} \frac{x}{e^x-1} = B(x) \left(\sum_{r>0} \frac{n^r}{r!} x^r \right)$$

e dedurre la formula

$$g_d(n) = \frac{1}{d+1} \sum_{r=1}^{d+1} \binom{d+1}{r} B_{d+1-r} n^r = \sum_{s=0}^{d} \frac{1}{s+1} \binom{d}{s} B_{d-s} n^{s+1}.$$

Test: siete più veloci di Bernoulli? Jakob Bernoulli si vantava di aver calcolato in meno di 8 minuti la sommatoria $g_{10}(1000)$. Utilizzando i risultati degli esercizi precedenti, sapere fare altrettanto? (Ovviamente Bernoulli faceva tutti i conti a mano).

Esercizio 38. Sia $Q(x) = B(-x)$; provare che $xQ(x)' = Q(x) - Q(x)B(x)$ e dedurre la formula:

$$(1 + n(-1)^n)B_n = -\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k} B_k B_{n-k}.$$

Esercizio 39. Provare che $xB(x)' = (1 - x)B(x) - B(x)^2$ e dedurre la formula (di Eulero):

$$-B_n = B_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_k B_{n-k}.$$

Esercizio 40. Si considerino le successioni $\phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $I_n \in \mathbb{Q}$, $n \geq 1$, definite per ricorrenza:

$$I_0 = -1, \quad \phi_1(x) = x, \qquad I_n = \int_0^1 \phi_n(x)dx, \qquad \phi_{n+1}(x) = \int_0^x \phi_n(s)ds - xI_n.$$

Dimostrare che

$$\sum_{n\geq 0}(\phi_n(x) - I_n)t^n = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} \quad \text{e} \quad I_n = -\frac{B_n}{n!} \ .$$

(Suggerimento: sia $F(x,t) = \sum_{n\geq 0}(\phi_n(x) - I_n)t^n$; calcolare la derivata di F rispetto a x e determinare il rapporto $F(x,t)/F(0,t)$. Mostrare inoltre che $\int_0^1 F(x,t)dx = 1$.)

Esercizio 41. I *polinomi di Bernoulli* $B_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ si definiscono tramite la EGF

$$\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \ .$$

Provare che

$$\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n = \left(\sum_{m\geq 0}\frac{B_m}{m!}t^m\right)\left(\sum_{r\geq 0}\frac{x^r}{r!}t^r\right) \ , \qquad B_n(x) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_{n-r}x^r.$$

Mostrare inoltre che $g_{n-1}(m) = \dfrac{B_n(m) - B_n}{n}$.

Esercizio 42. Dato un intero $n > 0$ provare che per ogni $d \geq 0$ vale

$$\sum_{r=0}^{d}\binom{d+1}{r}g_r(n) = n^{d+1}, \qquad \sum_{r=0}^{+\infty}\binom{d+1}{r}g_r(n) = n^{d+1} + g_{d+1}(n) = g_{d+1}(n+1).$$

Esercizio 43. Provare che la matrice $(g_d(r+1))$, $1 \leq d, r \leq m$, è invertibile (sugg.: sottrarre ad ogni colonna la precedente e ridursi ad una matrice di Vandermonde). Lo stesso vale se nell'ultima riga il termine $g_m(r+1)$ è sostituito con r^m.

Esercizio 44. Usare gli Esercizi 42 e 43 per dedurre che la matrice di coefficienti $a_{d,r} = \dbinom{d+1}{r}$, $0 \leq d, r \leq m$, è invertibile.

12. Numeri di Bernoulli e zeta di Riemann

In questa sezione dimostriamo che per ogni intero $n > 0$ vale

$$\zeta(2n) = -\frac{(-1)^n}{2}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2\pi)^{2n},$$

dove

$$\zeta(s) = \sum_{l>0}\frac{1}{l^s}$$

è la funzione zeta di Riemann.

Lemma 12.1. *Sia m un intero positivo dispari, allora*

$$\sin(x) = m\sin(\frac{x}{m})\prod_{l=1}^{m/2}\frac{\sin^2(\frac{l\pi}{m}) - \sin^2(\frac{x}{m})}{\sin^2(\frac{l\pi}{m})}$$

Dimostrazione. Dalla formula

$$\cos(x) + i\sin(x) = (\cos(\frac{x}{m}) + i\sin(\frac{x}{m}))^m$$

segue che $\sin(x)$ è un polinomio di grado m in $\cos(\frac{x}{m})$ e $\sin(\frac{x}{m})$. Inoltre siccome m è dispari, in tale polinomio il coseno appare sempre con esponente pari, sostituendo $\cos^2$ con $1-\sin^2$ troviamo un polinomio $Q(z)$ di grado m tale che $\sin(x) = Q(\sin(\frac{x}{m}))$. Siccome $\sin(k\pi) = 0$ per ogni intero k, ne segue che gli m numeri reali distinti

$$\sin(\frac{l\pi}{m}), \qquad -\frac{m}{2} < l < \frac{m}{2}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

annullano il polinomio Q e pertanto ne sono le radici. Esiste dunque una costante A tale che

$$Q(z) = A\prod_{-m/2<l<m/2}(z - \sin(\frac{l\pi}{m})) = Az\prod_{l=1}^{m/2}(z^2 - \sin^2(\frac{l\pi}{m})).$$

Dunque

$$\sin(x) = A\sin(\frac{x}{m})\prod_{l=1}^{m/2}(\sin^2(\frac{x}{m}) - \sin^2(\frac{l\pi}{m})), \tag{3}$$

Dividendo per x e passando al limite per $x \to 0$ si ottiene

$$1 = \frac{A}{m}\prod_{l=1}^{m/2}(-\sin^2(\frac{l\pi}{m})).$$

□

Prendiamo la derivata logaritmica dell'Equazione 3 e poi moltiplichiamo per x, otteniamo che per ogni $x \in (-\pi, \pi)$ vale

$$x\cot(x) = \frac{x}{m}\cot(\frac{x}{m}) + \sum_{l=1}^{m/2}\frac{\frac{2x}{m}\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})}{\sin^2(\frac{x}{m}) - \sin^2(\frac{l\pi}{m})},$$

$$x\cot(x) = \frac{x}{m}\cot(\frac{x}{m}) + \sum_{l=1}^{m/2}\frac{2xm\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})}{m^2\sin^2(\frac{x}{m}) - m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m})}. \tag{4}$$

Notiamo che per ogni l ed ogni x si ha

$$\lim_{m\to\infty}\frac{x}{m}\cot(\frac{x}{m}) = 1, \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{2xm\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})}{m^2\sin^2(\frac{x}{m}) - m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m})} = \frac{2x^2}{x^2 - l^2\pi^2}.$$

Lemma 12.2. *Siano date le successioni di numeri reali*

$$\{a_{l,m}\},\qquad \{b_l\},\qquad \{c_n\},\qquad l,m>0,\quad n\geq N,$$

con le seguenti proprietà:

(1) *Per ogni* l *vale* $\lim_{m\to\infty} a_{l,m}=b_l$.
(2) *Per ogni* $l\geq N$ *ed ogni* m *vale* $|a_{l,m}|\leq c_l$.
(3) $\sum_l c_l<\infty$.

Allora le serie $\sum_l a_{l,m}$ *e* $\sum_l b_l$ *sono assolutamente convergenti e*

$$\lim_{m\to\infty}(\sum_l a_{l,m})=\sum_l b_l.$$

Dimostrazione. Si tratta di un classico risultato di analisi. Riportiamo la dimostrazione per completezza.

Chiaramente $|b_l|=\lim_m|a_{l,m}|\leq c_l$ per ogni $l\geq N$; dunque le serie $\sum_l a_{l,m}$ e $\sum_l b_l$ sono asolutamente convergenti. Sia $\epsilon>0$ e scegliamo $A\geq N$ tale che $\sum_{l\geq A}c_l<\epsilon$. Allora per ogni m vale

$$|\sum_{l\geq A}a_{l,m}|<\epsilon,\qquad |\sum_{l\geq A}b_l|<\epsilon$$

e quindi

$$|\sum_l a_{l,m}-\sum_l b_l|<\left|\sum_{l<A}a_{l,m}-\sum_{l<A}b_l\right|+2\epsilon$$

e per m sufficientemente grande il primo addendo del secondo membro può essere reso piccolo a piacere. □

Teorema 12.3. *Per ogni* $x\in(-\pi,\pi)$ *vale*

$$x\cot(x)=1+\sum_{l>0}\frac{2x^2}{x^2-l^2\pi^2}.$$

Dimostrazione. Sia x fissato; siccome entrambi i membri dell'equazione sono pari non è restrittivo supporre $x\geq 0$. Consideriamo la successione

$$a_{l,m}=\begin{cases}\dfrac{2xm\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})}{m^2\sin^2(\frac{x}{m})-m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m})} & \text{per } l<m/2,\\[2ex] 0 & \text{per } l\geq m/2.\end{cases}$$

Ricordiamo che, per la convessità del seno si ha

$$\frac{2x}{\pi}\leq\sin(x)\leq x,\qquad \text{per ogni } x\in[0,\pi/2],$$

e quindi per ogni $l\geq 2$, $m>2l$ vale

$$|2xm\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})|\leq 2x^2\leq 2\pi^2,$$

$$|m^2\sin^2(\frac{x}{m})-m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m})|=m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m})-m^2\sin^2(\frac{x}{m})\geq\frac{4}{\pi^2}l^2\pi^2-x^2\geq 4l^2-\pi^2\geq l^2.$$

Dunque $|a_{l,m}|\leq\frac{2\pi^2}{l^2}$ per ogni m ed ogni $l\geq 2$. Possiamo quindi passare al limite l'Equazione 4 e concludere la dimostrazione. □

Possiamo riscrivere l'equazione del Teorema 12.3 come

$$x\cot(x)=1-\sum_{l>0}\frac{2x^2}{l^2\pi^2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{l^2\pi^2}}=1-\sum_{l>0}\frac{2x^2}{l^2\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{l^{2n}\pi^{2n}}=1-\sum_{n\geq 0}\frac{2x^{2n+2}}{\pi^{2n+2}}\sum_{l>0}\frac{1}{l^{2n+2}}.$$

Abbiamo dunque dimostrato che
$$x\cot(x) = 1 - 2\sum_{n>0} \frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}\zeta(2n).$$

Possiamo trovare un'altra descrizione dello sviluppo in serie di $x\cot(x)$. Infatti
$$x\cot(x) = ix\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = ix\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1} =$$
$$= \frac{ix}{e^{2ix}-1} + \frac{ixe^{2ix}}{e^{2ix}-1} = \frac{ix}{e^{2ix}-1} - \frac{ix}{e^{-2ix}-1} = \frac{1}{2}(B(2ix) - B(-2ix)) =$$
$$= 1 + \sum_{n>0} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n} = 1 + \sum_{n>0} \frac{B_{2n}}{(2n)!}2^{2n}(-1)^n x^{2n}$$

Ne consegue che
$$\zeta(2n) = -\frac{(-1)^n}{2}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2\pi)^{2n}, \qquad B_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n).$$

Ad esempio
$$\zeta(2) = \frac{1}{2}\frac{B_2}{2!}(2\pi)^2 = B_2\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Siccome $\zeta(2) \geq \zeta(2n) \geq 1$ troviamo
$$2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \leq |B_{2n}| \leq \frac{\pi^2}{3}\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

Esercizio 45. Provare che per $x \in (-\pi, \pi)$ vale
$$\sin(x) = x\prod_{l>0}\left(1 - \frac{x^2}{l^2\pi^2}\right).$$
(Suggerimento: le due funzioni sono dispari, hanno la stessa derivata in 0 e la stessa derivata logaritmica in $(0, \pi)$.)

Esercizio 46. Calcolare $\sin(\pi/2)$ usando l'Esercizio 45 e dedurre la formula di Wallis.

Esercizio 47. Utilizzare l'Esercizio 45 per calcolare il prodotto
$$\prod_{l\in A}\frac{(2l-1)(2l+1)}{(2l)^2}$$
nei seguenti casi:

(1) $A = \{l \in \mathbb{N} \mid l > 0 \text{ pari }\}$
(2) $A = \{l \in \mathbb{N} \mid l > 0 \text{ dispari }\}$

13. Elementi di Lie e operatori aggiunti

Lavoreremo sul campo dei numeri reali anche se molti degli argomenti trattati valgono in maggiore generalità. Per algebra intenderemo un anello commutativo che è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un esempio di algebra è quello delle funzioni di classe C^∞ su un aperto di $\mathbb{R}$. Se H è un'algebra denoteremo con $M_n(H)$ lo spazio vettoriale delle matrici $n\times n$ a coefficienti in R. Se V è uno spazio vettoriale indicheremo con $\mathrm{End}(V)$ lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari $V \to V$; il prodotto di composizione in $\mathrm{End}(V)$ è associativo.

Sia V uno spazio vettoriale, per ogni $A, B \in \mathrm{End}(V)$ denotiamo
$$[A, B] = AB - BA.$$
Si noti che $[B, A] = -[A, B]$, che l'applicazione $(A, B) \mapsto [A, B]$ è bilineare e vale la cosiddetta *identità di Jacobi*:
$$[[A, B], C] = [A, [B, C]] - [B, [A, C]]\ .$$

Definizione 13.1. Un sottospazio vettoriale $W \subset \mathrm{End}(V)$ si dice *sottoalgebra di Lie* se per ogni $A, B \in W$ vale $[A, B] \in W$.

Ad esempio gli operatori a traccia nulla sono una sottoalgebra di Lie di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

Dati due sottospazi vettoriali $Z, W \subset \mathrm{End}(V)$ denotiamo con $[Z, W]$ il sottospazio vettoriale generato da tutti i vettori del tipo $[z, w]$, al variare di $z \in Z$ e $w \in W$. Si pone poi

$$Z^1 = Z, \quad Z^2 = [Z, Z] = [Z, Z^1], \quad Z^n = [Z, Z^{n-1}]\,.$$

Lemma 13.2. *Per ogni $n, m > 0$ vale $[Z^n, Z^m] \subset Z^{n+m}$.*

Dimostrazione. Induzione su n, essendo il risultato vero per definizione quando $n = 1$. Supponiamo $n > 1$; siccome ogni elemento di Z^n è combinazione lineare di elementi del tipo $[z, v]$, con $z \in Z$ e $v \in Z^{n-1}$ basta dimostrare che

$$[[z, v], w] \in Z^{n+m} \qquad \text{per ogni} \quad z \in Z,\ v \in Z^{n-1},\ w \in Z^m.$$

Per l'identità di Jacobi vale

$$[[z, v], w] = [z, [v, w]] - [v, [z, w]],$$

mentre per l'ipotesi induttiva

$$[z, [v, w]] \in [Z, [Z^{n-1}, Z^m]] \subset [Z, Z^{n+m-1}] \subset Z^{n+m},$$

$$[v, [z, w]] \in [Z^{n-1}, [Z, Z^m]] \subset [Z^{n-1}, Z^{m+1}] \subset Z^{n+m}.$$

□

Definizione 13.3. Chiameremo i vettori di Z^n *elementi di Lie* di peso n di Z.

Dato $A \in \mathrm{End}(V)$ definiamo l'operatore lineare (detto operatore aggiunto)

$$\mathrm{ad}\, A\colon\ \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V), \qquad \mathrm{ad}\, A(B) = [A, B]\,.$$

Il prossimo lemma descrive gli effetti delle iterazioni di un operaore aggiunto.

Lemma 13.4. *Per ogni $A, B \in \mathrm{End}(V)$ ed ogni intero $n \geq 0$ vale*

$$(\mathrm{ad}\, A)^n B = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} A^{n-i} B A^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^{n-i} B (-A)^i.$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$(\mathrm{ad}\, A)^n B = A (\mathrm{ad}\, A)^{n-1}(B) - (\mathrm{ad}\, A)^{n-1}(B) A$$

e per induzione

$$(\mathrm{ad}\, A)^n B = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} A^{n-i} B A^i - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{i} A^{n-1-j} B A^{j+1}.$$

Ponendo $j = i - 1$ sulla secona sommatoria

$$(\mathrm{ad}\, A)^n B = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} A^{n-i} B A^i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n-1}{i-1} A^{n-i} B A^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) A^{n-i} B A^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} A^{n-i} B A^i.$$

□

14. Esponenziale e logaritmo di matrici

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ deefiniamo la sua norma pensandola come un vettore di $\mathbb{R}^{n^2}$, ossia se $A = (a_{ij})$, allora

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

Per la disuguaglianza triangolare si ha $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Vale inoltre la formula $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (e di conseguenza $\|A^k\| \leq \|A\|^k$): infatti se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ si ha

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j}(\sum_k a_{ik}bkj)^2;$$

Il termine $\sum_k a_{ik}bkj$ è il prodotto scalere di due vettori, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$(\sum_k a_{ik}b_{kj})^2 \leq (\sum_s a_{is}^2)(\sum_r b_{rj}^2)$$

e quindi

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i,j}(\sum_s a_{is}^2)(\sum_r b_{rj}^2) = \left(\sum_{i,s} a_{is}^2\right)\left(\sum_{r,j} b_{rj}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2.$$

Ne consegue che il valore assoluto di ogni coefficiente di A^n è maggiorato da $\|A\|^n$ e quindi:

(1) La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{n!}$ è totalmente convergente per ogni matrice A.

(2) La serie $\displaystyle\sum_{n>0}\frac{A^n}{n}$ è totalmente convergente per ogni matrice A tale che $\|A\| < 1$.

In analogia con il caso di una variabile denoteremo

$$e^A = \sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{n!}, \qquad \log(I - A) = -\sum_{n>0}\frac{A^n}{n}.$$

Notiamo che $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ e che $\|e^A - I\| \leq e^{\|A\|} - 1$. Osserviamo anche che le componenti dell'applicazione esponenziale

$$M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto e^A,$$

sono serie di potenze, quindi funzioni analitiche, quindi di classe C^∞. Ne segue che se $t \mapsto A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è un'applicazione C^∞, allora anche $t \mapsto e^{A(t)}$ è di classe C^∞.

Si ha

$$(e^{tA})' = \frac{d}{dt}\sum\frac{t^n}{n!}A^n = \sum\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n = Ae^{tA}.$$

ATTENZIONE: È generalmente falso che $(e^{A(t)})' = A(t)'e^{A(t)}$. Si consideri ad esempio la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A(t)' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome $A(t)^n = A(t)$ per ogni $n > 0$ si ha

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} 1 & t(e-1) \\ 0 & e \end{pmatrix}, \qquad (e^{A(t)})' = \begin{pmatrix} 0 & e-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = A(t)'e^{A(t)}.$$

Lemma 14.1. *Se $\|A\| < \log 2$ allora $\log(e^A) = A$. In particolare l'applicazion esponenziale è iniettiva in un intorno di 0.*

Dimostrazione. La funzione $\log(e^{tA}) = \log(1-(1-e^{tA})) = -\sum_{n>0} \frac{(1-e^{tA})^n}{n}$ è derivabile per $t \in [0,1]$, vale 0 per $t=0$ e la sua derivata è

$$\log(e^{tA})' = -\sum_{n\geq 0} -Ae^{tA}(1-e^{tA})^n = Ae^{tA}\frac{1}{1-(1-e^{tA})} = A.$$

□

15. La formula di derivazione

Vogliamo adesso trovare una formula per la derivata di $e^{A(t)}$; supponiamo per semplicità che $A(t)$ sia di classe C^∞ su un intervallo aperto $U \subset \mathbb{R}$, anche se il risultato vale in maggiore generalità. Abbiamo già osservato che anche $e^{A(t)}$ è di classe C^∞ su U.

Teorema 15.1. *Sia $A(t)$ una matrice a coefficienti funzioni C^∞ in un intervallo aperto U, allora vale la formula*

$$(e^{A(t)})'e^{-A(t)} = \frac{e^{\operatorname{ad} A(t)}-1}{\operatorname{ad} A(t)}A(t)' = \sum_{m\geq 0}\frac{(\operatorname{ad} A(t))^m A(t)'}{(m+1)!}.$$

Inoltre

$$A(t)' = \sum_{m\geq 0}\frac{B_m}{m!}(\operatorname{ad} A(t))^m[(e^{A(t)})'e^{-A(t)}],$$

dove i B_m sono i numeri di Bernoulli.

Dimostrazione. Sia $n>0$ l'ordine della matrice $A(t)$; indichiamo con $H = C^\infty(U)$ l'algebra delle funzioni C^∞ su U e con H^n lo spazio vettoriale delle n-uple di funzioni C^∞. Con il prodotto righe per colonna lo spazio $M_n(H)$ è immerso in $\operatorname{End}(H^n)$: anziché dimostrare che l'uguaglianza del teorema vale in $M_n(H)$, dimostriamo che vale nell'algebra associativa $\operatorname{End}(H^n)$.

Lo spazio $\operatorname{End}(H^n)$ contiene anche l'operatore di derivazione D:

$$D(f_1,\ldots,f_n) = (f_1',\ldots,f_n'), \qquad D \in \operatorname{End}(H^n).$$

dalla regola di Leibnitz segue che per ogni $B(t) \in M_n(H)$ e per ogni $F(t) \in H^n$ vale

$$D(B(t)F(t)) = B(t)'F(t) + B(t)D(F(t)),$$

e quindi vale $B(t)' = [D, B(t)]$ in $\operatorname{End}(H^n)$.

Dunque

$$e^{A(t)}De^{-A(t)} = \sum_{k,s\geq 0}\frac{A(t)^k}{k!}D\frac{(-A(t))^s}{s!}$$

ponendo $m = k+s$ e applicando il Lemma 13.4 troviamo

$$e^{A(t)}De^{-A(t)} = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A(t)^kD(-A(t))^s = \sum_{m\geq 0}\frac{(\operatorname{ad} A(t))^m}{m!}D =$$

$$= D + \sum_{m\geq 0}\frac{(\operatorname{ad} A(t))^m}{(m+1)!}[A(t), D] = D - \sum_{m\geq 0}\frac{(\operatorname{ad} A(t))^m}{(m+1)!}A(t)'.$$

Quindi

$$D - e^{A(t)}De^{-A(t)} = \sum_{m\geq 0}\frac{(\operatorname{ad} A(t))^m}{(m+1)!}A(t)'$$

e moltiplicando a destra per $e^{A(t)}$

$$(e^{A(t)})' = [D, e^{A(t)}] = \left(\sum_{m\geq 0}\frac{(\operatorname{ad} A(t))^m}{(m+1)!}A(t)'\right)e^{A(t)}.$$

Ricordiamo che i numeri di Bernoulli B_m sono definiti dallo sviluppo in serie $\dfrac{x}{e^x-1} = \displaystyle\sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} x^n$ e quindi l'operatore

$$\sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\operatorname{ad} A(t))^m \in \operatorname{End}(H^n)$$

è l'inverso di

$$\frac{e^{\operatorname{ad} A(t)} - 1}{\operatorname{ad} A(t)}.$$

Quindi

$$A(t)' = \left(\sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\operatorname{ad} A(t))^n) \right) \frac{e^{\operatorname{ad} A(t)} - 1}{\operatorname{ad} A(t)} A(t)' = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\operatorname{ad} A(t))^m [(e^{A(t)})' e^{-A(t)}].$$

□

16. La formula di Baker-Campbell-Hausdorff

Siano $A, C \in M_n(\mathbb{R})$, allora per $t, s \in \mathbb{R}$ sufficientemente vicini a 0 è ben definito $\log(e^{tA} e^{sC})$.

Teorema 16.1. *Nelle notazioni precedenti vale*

$$\log(e^{tA} e^{sC}) = \sum_{i+j>0} t^i s^j Z_{ij},$$

dove $Z_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ è un elemento di Lie di peso $i+j$ dello spazio generato da A, C.

Seguirà dalla dimostrazione che gli elementi Z_{ij} si possono calcolare mediante una formula ricorsiva. I primi termini della serie (peso ≤ 3) sono:

$$\log(e^{tA} e^{sC}) = tA + sC + \frac{ts}{2}[A, C] + \frac{t^2 s}{12}[A, [A, C]] + \frac{ts^2}{12}[C, [C, A]] + \cdots$$

Dimostrazione. Indichiamo con $Z = \log(e^{tA} e^{sC})$, allora per il Lemma 14.1

$$e^Z = e^{tA} e^{sC}, \qquad Z(0, s) = sC.$$

Derivando rispetto a t e applicando la formula di derivazione si ottiene

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\operatorname{ad} Z)^m \left[\frac{\partial e^Z}{\partial t} e^{-Z} \right]$$

e siccome

$$\frac{\partial e^Z}{\partial t} e^{-Z} = A e^{tA} e^{sC} e^{-sC} e^{-tA} = A$$

otteniamo

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\operatorname{ad} Z)^m A\ .$$

Se scriviamo inoltre $Z(t, s) = \sum_{m\geq 0} Z_m(s) t^m$ si ha $Z_0 = sC$; eguagliando i coefficienti di t^0 abbiamo

$$Z_1 = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\operatorname{ad} Z_0)^m A = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m s^m}{m!} (\operatorname{ad} C)^m A = A - \frac{s}{2}[C, A] + \frac{s^2}{12}[C, [C, A]] + \cdots,$$

e più in generale, eguagliando i coefficienti di t^r si ha

$$Z_{r+1} = \frac{1}{r+1} \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=r} (\operatorname{ad} Z_{i_1})(\operatorname{ad} Z_{i_2}) \cdots (\operatorname{ad} Z_{i_m}) A$$

Per concludere la dimostrazione bisogna dimostrare che il coefficiente di s^d in Z_r è di Lie di peso $d+r$. Per $r=0$ ci siamo; proseguiamo per induzione su r. Se scriviamo $Z_i = \sum_j Z_{ij}s^j$ la precedente formula ricorsiva diventa

$$Z_{r+1,d} = \frac{1}{r+1}\sum_{m\geq 0}\frac{B_m}{m!}\sum_{i_1+\cdots+i_m=r}\;\sum_{j_1+\cdots+j_m=d}(\operatorname{ad} Z_{i_1j_1})(\operatorname{ad} Z_{i_2j_2})\cdots(\operatorname{ad} Z_{i_mj_m})A$$

ed ogni addendo $(\operatorname{ad} Z_{i_1j_1})(\operatorname{ad} Z_{i_2j_2})\cdots(\operatorname{ad} Z_{i_mj_m})A$ è di Lie di peso $r+d+1$. $\square$