

Note su un corso di Geometria Algebrica

Università di Roma "La Sapienza",

Dipartimento di Matematica,

a.a. 2003-04

Indice

Capitolo 1. Funzioni Olomorfe di più Variabili Complesse	
Autori: Alfredo Donno e Daniele D'Angeli	
1. Generalità	1
2. L'Anello delle Funzioni Olomorfe	3
3. Il Teorema di Vitali	6
4. L'Anello $\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n}$	7
5. I Teoremi di Preparazione e Divisione	9
Capitolo 2. Varietà Complesse	
Autori: Alessandra Bianchi e Francesco Simone Blasi	
1. Anelli Locali	13
2. Studio degli Omomorfismi Locali	14
3. I chiusi Analitici	18
4. Varietà Complesse	19
5. Stratificazione di Whitney	20
6. Polinomi Irriducibili: Alcuni Risultati	21
Capitolo 3. Coomologia (di Čech) dei Fasci	
Autori: Simone Diverio e Fabio Massimo Marchetti	
1. Prefasci e spighe	25
2. Fasci e Spazi Étale	30
3. Successioni esatte di morfismi di prefasci e fasci	36
4. Elementi di Algebra Omologica	46
5. Coomologia di Čech	48
6. Fasci (Čech-)Aciclici	51
7. Il Teorema di Isomorfismo di De Rham-Weil	58
8. Successione Spettrale di un Complesso Filtrato	60
9. Successione Spettrale di un Complesso Doppio	64
Capitolo 4. Coomologia a valori in un fibrato olomorfo	
Autore: Guido Pollini	
1. Coomologia a valori in un fibrato olomorfo	67
2. Minitoria di Dolbeault	69
3. Costruzione del ricoprimento \mathcal{F} -aciclico	77
4. Fasci di spazi di Fréchet	81
5. Appendice: spazi di Fréchet	85
Bibliografia	89

Presentazione

Con un certo ritardo, totalmente dovuto all'inerzia del sottoscritto, si rendono pubbliche le note scritte dagli studenti dottorandi in occasione del corso di Geometria Algebrica tenuto presso il Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo" nella primavera del 2004.

Alcuni argomenti svolti nel corso (curve ellittiche, dimensione algebrica e di Kodaira ecc.) non si trovano in queste note; d'altra parte alcuni argomenti solamente accennati durante il corso vengono qui trattati con maggior profondità.

Roma, novembre 2005,

Marco Manetti

Funzioni Olomorfe di più Variabili Complesse

Autori: Alfredo Donno e Daniele D'Angeli

In questo capitolo introdurremo alcuni elementi della teoria delle funzioni olomorfe di più variabili complesse. Saranno provati il Principio di Identità nel caso n -dimensionale ed il Teorema di Hartogs (la cui dimostrazione sarà data solo nel caso $n = 2$).

Passeremo poi allo studio dell'anello delle funzioni olomorfe su un aperto D di \mathbb{C}^n , che verrà dotato di una topologia rispetto alla quale risulterà essere uno spazio di Fréchet. Sarà data anche una dimostrazione del Teorema di Vitali.

Introdurremo, quindi, l'anello dei germi delle funzioni olomorfe, l'anello delle serie di potenze formali e quello delle serie convergenti in n indeterminate. Utilizzando i Teoremi di Divisione e di Preparazione di Weierstrass, dimostreremo infine che quest'ultimo è un dominio a fattorizzazione unica.

1. Generalità

Sia \mathbb{C}^n lo spazio vettoriale complesso n -dimensionale. Indichiamo con $z = (z_1, \dots, z_n)$ il vettore di \mathbb{C}^n di coordinate z_1, \dots, z_n la cui norma è definita come $|z| = \max_i \{|z_i|\}$. Chiamiamo *poliraggio* l' n -upla $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i > 0$, e chiamiamo *polidisco* di centro $w = (w_1, \dots, w_n)$ e poliraggio r il sottoinsieme di \mathbb{C}^n dato da $\Delta(w, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i - w_i| < r_i\} = \Delta(w_1, r_1) \times \dots \times \Delta(w_n, r_n)$. Dato un tale polidisco, definiamo il suo *bordo di Shilov* come $\partial_0 \Delta(w, r) = \partial \Delta(w_1, r_1) \times \dots \times \partial \Delta(w_n, r_n)$.

DEFINIZIONE 1.1. Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto. Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se per ogni $w \in D$ esiste $w \in U \subset D$, U aperto, tale che per ogni $z \in U$ si abbia

$$f(z) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I (z - w)^I = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \dots (z_n - w_n)^{i_n},$$

dove $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ e $z^I = z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$.

Dalla definizione segue che la proprietà di olomorfia è una proprietà locale, pertanto $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se $f|_{\Delta}$ è olomorfa per ogni $\Delta \subset D$ polidisco.

PROPOSIZIONE 1.2. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ è *olomorfa* se e solo se è *continua e separatamente olomorfa*, cioè l'applicazione $z_i \mapsto f(z_1, \dots, z_n)$ è olomorfa per ogni i e per ogni $z_1, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_n$.

DIMOSTRAZIONE. \Rightarrow Segue dalla definizione.

\Leftarrow Sia $w \in D$. Esiste allora un poliraggio r tale che $\overline{\Delta(w, r)} \subset D$. Sia ora $z \in \Delta(w, r)$. Essendo la f olomorfa rispetto a z_1 , applichiamo la formula di Cauchy ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - w_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento rispetto alle altre variabili, si ha

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{|\zeta_1 - w_1| = r_1} \int_{|\zeta_2 - w_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2 = \dots$$

$$\dots = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 \Delta} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

che è la formula di Cauchy nel caso n -dimensionale. Dal momento che per ogni $k = 1, \dots, n$ vale $|\zeta_k - w_k| > |z_k - w_k|$, abbiamo

$$\frac{1}{\zeta_k - z_k} = \frac{1}{\zeta_k - w_k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_k - w_k}{\zeta_k - w_k}} = \frac{1}{\zeta_k - w_k} \sum_{i_k=0}^{\infty} \left(\frac{z_k - w_k}{\zeta_k - w_k}\right)^{i_k}.$$

Sostituendo queste espressioni in quella precedentemente ricavata, si ottiene

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n},$$

dove

$$a_{i_1 \dots i_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 \Delta} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - w_1)^{i_1+1} \cdots (\zeta_n - w_n)^{i_n+1}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Detto M il massimo di $|f|$ su $\partial_0 \Delta(w, r)$, si ha $|a_{i_1 \dots i_n}| \leq \frac{M}{r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}}$, il che garantisce la convergenza assoluta della serie in $\Delta(w, r)$. \square

Le funzioni olomorfe in n variabili possono essere caratterizzate tramite un analogo delle equazioni di Cauchy-Riemann in una variabile. Sia infatti $D \subseteq \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$ aperto e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 . Dette x_i, y_i le $2n$ coordinate in \mathbb{R}^{2n} , poniamo $z_i = x_i + iy_i$ e $\bar{z}_i = x_i - iy_i$, da cui $dz_i = dx_i + idy_i$ e $d\bar{z}_i = dx_i - idy_i$. Valgono le seguenti identità:

$$x_i = \frac{z_i + \bar{z}_i}{2}, \quad y_i = \frac{z_i - \bar{z}_i}{2i},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

Allora

$$df = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \right) = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Vale il seguente

TEOREMA 1.3. *Una funzione f , di classe C^1 , è olomorfa se e solo se*

$$\bar{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $i = 1, \dots, n$ vale

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i = \frac{\partial f}{\partial z_i} (dx_i + idy_i) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} (dx_i - idy_i),$$

così

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} = i \frac{\partial f}{\partial z_i} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}.$$

Dunque $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y_i} = i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, che è proprio l'equazione di Cauchy-Riemann relativamente a z_i . Dalla Proposizione 1.2 segue l'asserto. \square

Diamo ora un'estensione del principio di identità già noto nel caso unidimensionale.

PROPOSIZIONE 1.4. *Siano $D \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto connesso, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $f \equiv 0$ su un aperto di D , allora $f \equiv 0$ su D .*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $E = \{z \in D : f(z) = 0\}$. $E \subseteq D$ è evidentemente un chiuso. Dalle ipotesi segue che $\text{int}(E) \neq \emptyset$.

Se $\text{int}(E) = E$, allora $E \subseteq D$ è non vuoto, chiuso e aperto e quindi $D = E$.

Supponiamo invece, per assurdo, che E non sia aperto, così $\text{int}(E) \subset E$. Sia $E' = \overline{\text{int}(E)}$ e sia $w \in E' \setminus \text{int}(E)$. Esiste $r > 0$ tale che $\Delta(w, r) \subset D$. Consideriamo $w_0 \in \text{int}(E)$ tale che $|w_0 - w| < r/2$. Scelto un tale w_0 , per la disuguaglianza triangolare si ha $\Delta(w_0, \frac{r}{2}) \subset \Delta(w, r) \subset D$. Sia ora $0 < \delta < \frac{r}{2}$ tale che $\Delta(w_0, \delta) \subset \text{int}(E)$, e consideriamo $z \in \Delta(w_0, \frac{r}{2})$. Facendo lo sviluppo della f in serie di potenze di centro w_0 , si ha $f(z) = \sum_I a_I (z - w_0)^I$, dove $a_I = \frac{1}{i_1! \dots i_n!} \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} f}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_n^{i_n}}(w_0) = 0$, come segue dalle ipotesi. Così $f \equiv 0$ in $\Delta(w_0, \frac{r}{2})$, che è un intorno aperto di w , e così $w \in \text{int}(E)$, il che è assurdo. \square

COROLLARIO 1.5. Siano $D \subset \mathbb{C}^n$ un aperto connesso, $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni olomorfe. Se $f \equiv g$ su un aperto $E \subseteq D$, allora $f \equiv g$ su D .

TEOREMA 1.6 (Hartogs). Siano $\Delta = \Delta(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco, $K \subset \Delta$ un compatto, ed assumiamo che $\Delta \setminus K$ sia connesso. Se $f : \Delta \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, allora f si estende in modo unico ad una funzione $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità dimostriamo il Teorema solo nel caso $n = 2$. Osserviamo che l'unicità della \tilde{f} è garantita dal principio di identità. Dimostriamo quindi l'esistenza. Essendo K un compatto, esiste $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ tale che $K \subset \Delta(0, \delta) \subset \overline{\Delta(0, \delta)} \subset \Delta$. Fissata $z_2 = \text{costante}$, definiamo

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=\delta_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.$$

Tale funzione è olomorfa nelle variabili z_1, z_2 nel polidisco $\Delta(0, \delta)$. Verifichiamo che la f e la g coincidono in un aperto non vuoto di $\Delta(0, \delta) \setminus K$. Siano $w_2 \in \mathbb{C}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $\Delta((0, w_2), (\delta_1, \varepsilon)) \cap K = \emptyset$, allora dato $z_2 \in \Delta(w_2, \varepsilon)$, risulta $\Delta(0, \delta_1) \times \{z_2\} \cap K = \emptyset$. Pertanto le espressioni di f e g coincidono per la formula di Cauchy e ciò chiude la dimostrazione. \square

Questo risultato può essere esteso anche al caso di un aperto qualsiasi D di \mathbb{C}^n e di un compatto K tali che $D \setminus K$ sia connesso.

2. L'Anello delle Funzioni Olomorfe

Dato $D \subset \mathbb{C}^n$ aperto, denotiamo $\mathcal{O}(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ olomorfe}\}$. $\mathcal{O}(D)$ soddisfa le seguenti proprietà:

- $\mathcal{O}(D)$ è un anello;
- $\mathcal{O}(D)$ è un \mathbb{C} -spazio vettoriale;
- $\mathcal{O}(D)$ è uno spazio metrico completo.

Le prime due proprietà sono di banale verifica. Riguardo alla terza proprietà, definiamo su $\mathcal{O}(D)$ una topologia, la topologia *compatta-aperta* o della convergenza uniforme sui compatti, ed una metrica che induce tale topologia e rispetto alla quale tale spazio risulti completo.

Diciamo che $U \subset \mathcal{O}(D)$ è un aperto se

$$\forall f \in U \exists K \subset D \text{ compatto ed } \varepsilon > 0 :$$

$$B(f, K, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{O}(D) : \|f - g\|_K < \varepsilon\} \subset U,$$

dove, per una funzione continua $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, si pone $\|f\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|$.

L'unica proprietà non banale da verificare è che l'intersezione di un numero finito di aperti è ancora un aperto. Verifichiamolo.

Siano U_1, U_2 aperti di $\mathcal{O}(D)$ e siano K_1, K_2 ed $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ come sopra. Definiamo $K = K_1 \cup K_2$,

$\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e sia $h \in U_1 \cap U_2$. Presa $g \in B(h, K, \varepsilon)$, allora $\varepsilon > \|g - h\|_K$ e così pure $\varepsilon > \|g - h\|_{K_1}$ ed $\varepsilon > \|g - h\|_{K_2}$. Per come è stato scelto ε , si ha $g \in B(h, K_1, \varepsilon_1) \cap B(h, K_2, \varepsilon_2)$, e quindi

$$B(h, K, \varepsilon) \subset B(h, K_1, \varepsilon_1) \cap B(h, K_2, \varepsilon_2) \subset U_1 \cap U_2.$$

Ciò implica che $U_1 \cap U_2$ è aperto.

Per poter definire la metrica su $\mathcal{O}(D)$, abbiamo bisogno di alcune osservazioni preliminari. Dato uno spazio topologico X , un'esaustione in compatti di X è un ricoprimento del tipo $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ che soddisfi le seguenti proprietà:

1. K_i è compatto per ogni i ;
2. $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$.

Vale il seguente

LEMMA 2.1. *Ogni aperto non vuoto di \mathbb{C}^n ammette un'esaustione in compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $D \subset \mathbb{C}^n$ un aperto non vuoto e scegliamo un sottoinsieme $\{x_n\} \subset D$ denso e numerabile. Dimostriamo che esistono $\{r_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tali che

1. $\Delta(x_n, r_n) \subset D$;
2. $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta(x_n, \frac{r_n}{2}) = D$.

Definiamo $r_n = d(x_n, X \setminus D) > 0$. La proprietà 1 segue. Verifichiamo la 2. Sia ora $y \in D$ e sia $h = d(y, X \setminus D) > 0$. Per l'ipotesi di densità esiste x_n tale che $d(x_n, y) < h/3$. Dalla disuguaglianza triangolare segue inoltre che $d(x_n, X \setminus D) > 2h/3$. Da ciò segue $d(x_n, y) < r_n/2$ e quindi la 2. Possiamo così definire, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il compatto K_n come

$$K_n = \bigcup_{i=0}^n \overline{\Delta\left(x_i, \frac{r_i}{n+1}\right)},$$

e questa è l'esaustione cercata. □

Possiamo adesso definire su $\mathcal{O}(D)$ una metrica che induce la topologia già introdotta. Sia $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ un'esaustione in compatti di D . Denotiamo $\|f\|_n = \|f\|_{K_n}$. Date $f, g \in \mathcal{O}(D)$, definiamo

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} \|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}.$$

La funzione d è evidentemente ben definita ed è facile verificare che soddisfa gli assiomi di distanza. Verificare che la d induce la topologia della convergenza uniforme sui compatti equivale a dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j \in \mathbb{N} : \|f\|_j < 1/j \Rightarrow d(f, 0) < \varepsilon$$

e, viceversa, che

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists \varepsilon > 0 : d(f, 0) < \varepsilon \Rightarrow \|f\|_j < 1/j.$$

Sia $\varepsilon > 0$. Esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{2^{-n} \|f\|_n}{1 + \|f\|_n} \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} < \frac{1}{2} \quad \forall f \in \mathcal{O}(D).$$

Scegliamo $j \in \mathbb{N}$ tale che $j \geq k$ e $\frac{1/j}{1+1/j} < \varepsilon/2$. Sia ora $\|f\|_j < 1/j$. Si ha

$$d(f, 0) = \sum_{n=1}^j \frac{2^{-n} \|f\|_n}{1 + \|f\|_n} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{2^{-n} \|f\|_n}{1 + \|f\|_n} \leq \left(\sum_{n=1}^j 2^{-n} \right) \frac{\|f\|_j}{1 + \|f\|_j} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Viceversa, sia $j \in \mathbb{N}$. Scegliamo allora $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \frac{2^{-j}/j}{1+1/j}$. Sia $f \in \mathcal{O}(D)$ e sia $d(f, 0) < \varepsilon$. Così

$$\frac{2^{-j}\|f\|_j}{1 + \|f\|_j} < \frac{2^{-j}/j}{1 + 1/j},$$

da cui segue $\|f\|_j < \frac{1}{j}$, essendo crescente in t la funzione $\frac{t}{1+t}$.

Le operazioni di somma tra vettori e di moltiplicazione per uno scalare sono continue rispetto a tale topologia e così $\mathcal{O}(D)$ risulta essere uno spazio vettoriale topologico.

DEFINIZIONE 2.2. Uno spazio vettoriale topologico X su \mathbb{C} è di *Fréchet* se:

1. la topologia su X è indotta da una metrica d completa ed invariante per traslazioni;
2. $0 \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni convessi.

Vogliamo dimostrare che $\mathcal{O}(D)$ è uno spazio di Fréchet. E' evidente che d è invariante per traslazioni. Per completare la dimostrazione, introduciamo una famiglia di *seminorme* definite nell'ambito più generale di uno spazio vettoriale V , cioè applicazioni $p_n : V \rightarrow [0, +\infty[$ tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si abbia:

1. $p_n(\lambda x) = |\lambda|p_n(x)$;
2. $p_n(x + y) \leq p_n(x) + p_n(y)$;
3. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p_n^{-1}(0) = 0$.

Introduciamo ora su V una topologia che renda V uno spazio vettoriale topologico, le p_n continue e che sia la meno fine con queste proprietà. Definiamo come sistema fondamentale di intorni dello zero l'insieme

$$\left\{ \bigcap_{\text{finite}} p_{n_i}^{-1}([0, \varepsilon_i[), \varepsilon_i > 0 \right\}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $t \in [0, 1]$, si ha

$$p_n(tx + (1-t)y) \leq p_n(tx) + p_n((1-t)y) = tp_n(x) + (1-t)p_n(y), \quad \forall x, y \in V.$$

Così $p_n^{-1}([0, \varepsilon[)$ è convesso e quindi quello definito è un sistema fondamentale di intorni convessi dello zero.

Definendo su V la distanza d come

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \quad \forall x, y \in V,$$

essa induce su V la topologia sopra introdotta. Lo spazio V è quindi di Fréchet se e solo se è completo rispetto a tale distanza.

Sia $\{f_n\}$ di Cauchy rispetto a d , cioè per ogni $h \in \mathbb{N}$ valga la proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : p_h(f_n - f_m) \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Nel nostro caso si ha $V = \mathcal{O}(D)$, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ esaustione in compatti e $p_h(f) = \max_{K_h} |f|$. Così, una successione $\{f_i\}$ è di Cauchy in $\mathcal{O}(D)$ se, per ogni h , $f_i|_{K_h}$ è di Cauchy.

Ricordiamo che se, X è uno spazio topologico compatto, lo spazio $C^0(X, \mathbb{C})$ delle funzioni continue da X in \mathbb{C} è completo rispetto alla distanza $d(f, g) = \max_X |f - g|$. Quindi per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste $g^h : K_h \rightarrow \mathbb{C}$ continua tale che $f_i \rightarrow g^h$ uniformemente su K_h , così esiste $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ continua tale che $g|_{K_h} = g^h$. Dimostriamo che g è anche olomorfa in D . Sia $z_0 \in D$ e scegliamo $r > 0$ tale che $\Delta(z_0, r) \subset K_h$ per h sufficientemente grande. Pertanto, per ogni $z \in \Delta(z_0, r)$, si ha

$$g(z) = g^h(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\partial_0 \Delta} \frac{f_i(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\prod_i (\zeta_i - z_i)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Per la convergenza uniforme di f_i su $\bar{\Delta}$ a g^h e osservando che $\partial_0\Delta$ è un compatto, si può passare al limite sotto il segno di integrale, così

$$g(z) = g^h(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0\Delta} \frac{g^h(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\prod_i (\zeta_i - z_i)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

e quindi g è olomorfa in $\Delta(z_0, r)$. Dal momento che questo ragionamento può essere ripetuto per ogni $w \in D$, si ha $g \in \mathcal{O}(D)$.

3. Il Teorema di Vitali

Vogliamo dimostrare in questa sezione il risultato di compattezza noto come Teorema di Vitali.

DEFINIZIONE 3.1. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, $F \subset C^0(X, \mathbb{C})$. Allora

1. F è *equilimitato* se

$$\exists C > 0 \text{ costante} : |f(x)| \leq C \quad \forall f \in F, \forall x \in X;$$

2. F è *equicontinuo* se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in F.$$

Un primo risultato è il seguente.

TEOREMA 3.2 (Ascoli-Arzelà). $F \subset C^0(X, \mathbb{C})$ è *relativamente compatto* se e solo se F è *equicontinuo* e *equilimitato*.

DIMOSTRAZIONE. \Leftarrow Per dimostrare la compattezza di \bar{F} è sufficiente dimostrare che da ogni $\{f_n\} \subset F$ si può estrarre una sottosuccessione di Cauchy. Osserviamo che esiste $\{x_n\} \subset X$ tale per ogni $\varrho > 0$ esiste $N(\varrho) \in \mathbb{N}$ tale che $X = \bigcup_{n=0}^{N(\varrho)} \Delta(x_n, \varrho)$. Infatti per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste $A_m \subset X$ finito, tale che $X = \bigcup_{x \in A_m} \Delta(x, \frac{1}{m})$ e quindi basta scegliere $\{x_n\} = \bigcup_m A_m$. Dal momento che F è equilimitato, per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha che $f_n(x_h)$ è una successione limitata. Utilizzando il procedimento di Cantor, si perviene ad una sottosuccessione g_n tale che $g_n(x_h)$ sia convergente per ogni h , diciamo $\lim_n g_n(x_h) = y_h$. In particolare

$$\forall h \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0 \quad \exists C(\varepsilon) : |g_n(x_h) - g_m(x_h)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq C(\varepsilon).$$

Dimostriamo che la g_n è una successione di Cauchy. Dall'ipotesi di equicontinuità segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \text{ vale } |g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon.$$

Scelto $x \in X$, sicuramente risulta $x \in \Delta(x_h, \delta)$, con $h \leq N(\delta)$, da cui abbiamo:

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(x_h)| + |g_n(x_h) - g_m(x_h)| + |g_m(x_h) - g_m(x)| < \\ &< 2\varepsilon + |g_n(x_h) - g_m(x_h)| < 3\varepsilon, \text{ se } m, n \geq C(\varepsilon). \end{aligned}$$

\Rightarrow Sia $f \in \bar{F}$ arbitraria. Analogamente a prima, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono indici $1, \dots, m(\varepsilon)$ tali che $\bar{F} = \bigcup_{i=0}^{m(\varepsilon)} \Delta(f_i, \varepsilon)$. E' possibile determinare un indice i tale che $f \in \Delta(f_i, \varepsilon)$. Così $|f(x)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x)|$ e quindi $\|f(x)\| \leq \|f(x) - f_i(x)\| + \|f_i(x)\|$. Sia $\|f_i\| = C_i$, allora $\|f\| \leq \varepsilon + C_i$. Essendo gli indici $1, \dots, m(\varepsilon)$ in numero finito, è possibile rendere la stima uniforme ed ottenere l'equilimitatezza.

Con un discorso analogo si prova l'equicontinuità. Se infatti $f \in \Delta(f_i, \varepsilon)$, per ogni $x, y \in X$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \\ &< 2\varepsilon + |f_i(x) - f_i(y)| < 3\varepsilon, \text{ se } d(x, y) < \delta_i. \end{aligned}$$

Essendo tali δ_i in numero finito al variare di f , è possibile rendere la stima uniforme ed ottenere l'equicontinuità. \square

TEOREMA 3.3 (Vitali). Sia $D \subset \mathbb{C}^n$ aperto e sia $F \subset \mathcal{O}(D)$ equilimitata sui compatti. Allora F è relativamente compatto.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che per l'aperto D vale

$$D = \bigcup_{h=0}^{\infty} \Delta(x_h, \frac{r_h}{2}), \quad \Delta(x_h, r_h) \subset D.$$

Consideriamo gli elementi di F come funzioni in $C^0(\overline{\Delta(x_h, \frac{r_h}{2})}, \mathbb{C})$. Ciò garantisce l'equilimitatezza. Verifichiamo l'equicontinuità. Dimostriamo, in verità, che F è anche equilipschitziana. Per ogni $f \in F$ e per ogni $z \in \Delta(x_h, \frac{r_h}{2})$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right| &= \left| \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\partial_0 \Delta(x_h, \frac{3r_h}{4})} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_j - z_j)^2 \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \right| \\ &\leq \frac{M}{r_h/4} \left(1 + \frac{r_h}{r_h/4} \right)^n = \text{costante}, \quad \forall j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

dove $M > 0$ limita $|f(x)|$ in $\Delta(x_h, \frac{3r_h}{4})$. Quindi, data $\{f_n\} \subset F$, per ogni polidisco $\overline{\Delta(x_h, \frac{r_h}{2})}$, è possibile scegliere una sottosuccessione uniformemente convergente su tale polidisco. Utilizzando il metodo diagonale di Cantor, se ne può così estrarre una convergente uniformemente su ogni polidisco $\overline{\Delta(x_h, \frac{r_h}{2})}$, $h \in \mathbb{N}$. Tale successione è allora convergente nella topologia di $\mathcal{O}(D)$, e ciò chiude la dimostrazione. \square

Vediamo ora una conseguenza del teorema di Vitali.

DEFINIZIONE 3.4. Siano V, W spazi vettoriali topologici su \mathbb{C} , e $p : V \rightarrow W$ lineare. Allora p è un operatore compatto se esiste un intorno U dello zero tale che $\overline{p(U)}$ è compatto in W .

COROLLARIO 3.5. Siano $D, E \subset \mathbb{C}^n$ aperti tali che \overline{D} sia compatto, $\overline{D} \subset E$. Allora l'operatore di restrizione $r : \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(D)$ che associa ad $f \in \mathcal{O}(E)$ la sua restrizione a D è compatto.

DIMOSTRAZIONE. Sia $U = \{f \in \mathcal{O}(E) : \max_{\overline{D}} |f| \leq 1\}$. Per come è definita la topologia su $\mathcal{O}(E)$, si ha che U è un intorno aperto dell'origine in $\mathcal{O}(E)$. Così la restrizione $r(\mathcal{O}(E))$ in $\mathcal{O}(D)$ è equilimitata sui compatti e dal teorema di Vitali segue che è relativamente compatta e così r è un operatore compatto. \square

4. L'Anello $\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n}$

Dato $0 \in \mathbb{C}^n$, definiamo l'anello dei germi delle funzioni olomorfe in 0 come

$$\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n} = \{(U, f) : U \text{ è aperto}, f \in \mathcal{O}(U)\} / \sim,$$

dove \sim è la relazione di equivalenza definita nel modo seguente:

$$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow \exists W \text{ aperto}, 0 \in W \subset U \cap V : f|_W = g|_W.$$

Osservando che due funzioni coincidenti in un intorno dello zero hanno tutte le derivate in 0 coincidenti, risulta ben definita l'applicazione

$$T : \mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n} \rightarrow \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]],$$

dove $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] = \{\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}\}$ denota l'anello delle serie di potenze formali nelle indeterminate z_1, \dots, z_n . L'immagine, tramite T , dell'anello $\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n}$ è l'anello delle serie convergenti, che denoteremo $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

DEFINIZIONE 4.1. Dati un poliraggio $R \in]0, +\infty[^n$ ed una funzione

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$$

definiamo

$$\|f\|_R = \sum_{i_1, \dots, i_n} |a_{i_1 \dots i_n}| R_1^{i_1} \cdots R_n^{i_n} \in [0, +\infty].$$

LEMMA 4.2. $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ se e solo se esiste $R \in]0, +\infty[^n$ tale che $\|f\|_R < +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. \Leftarrow Se $\|f\|_R < +\infty$, allora evidentemente $f \in \mathcal{O}(\Delta(0, R))$.

\Rightarrow Se $f \in \mathcal{O}(\Delta(0, r))$ per un qualche $r \in]0, +\infty[^n$, allora f ammette lo sviluppo $f = \sum_I a_I z^I$, con $a_I = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{I+(1, \dots, 1)}} d\zeta$. Ora $|a_I| \leq \frac{M}{r^I}$, dove $M = \max_{|\zeta|=r} |f(\zeta)|$. Scelto $R < r$ (cioè $R_i < r_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$), si ha

$$|a_I| R^I \leq \frac{M R^I}{r^I} = M \left(\frac{R}{r}\right)^I.$$

Così la serie $\sum_I |a_I| R^I$ è maggiorata da una serie geometrica convergente. \square

Posto $B_R = \{f \in \mathcal{O}_{0, \mathbb{C}^n} : \|f\|_R < +\infty\}$, segue da quanto visto che

$$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} = \bigcup_R B_R.$$

Ricordiamo che un'algebra di Banach A è un'algebra complessa che è anche uno spazio di Banach rispetto ad una norma che soddisfa la disuguaglianza $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, per ogni $x, y \in A$.

Vale allora la seguente

PROPOSIZIONE 4.3. $(B_R, \|\cdot\|_R)$ è un'algebra di Banach.

DIMOSTRAZIONE. Dalle definizioni segue che B_R è un'algebra e che $\|\cdot\|_R$ soddisfa le tre proprietà che definiscono una norma. Verifichiamo, ora, che vale

$$\|fg\|_R \leq \|f\|_R \|g\|_R \quad \forall f, g \in B_R.$$

Nel caso in cui $f(z) = a_I z^I$, cioè f è un singolo monomio, allora evidentemente $\|fg\|_R = \|f\|_R \|g\|_R$.

Nel caso generale sia $f(z) = \sum_I a_I z^I$, allora si ha

$$\|fg\|_R \leq \sum_I \|g a_I z^I\|_R = \|g\|_R \sum_I \|a_I z^I\|_R = \|f\|_R \|g\|_R.$$

Rimane da verificare la proprietà di completezza. Sia $\{f_n\} \subset B_R$ una successione di Cauchy, $f_n = \sum_I a_I^n z^I$. Così $\{a_I^n\}$ è a sua volta una successione di Cauchy, per ogni I . Se $\|f_n - f_m\|_R \leq \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$, allora $|a_I^n - a_I^m| \leq \frac{\varepsilon}{R^I}$ per tali n, m . Così $|a_I^n - a_I^\infty| \leq \frac{\varepsilon}{R^I}$ per ogni $n \geq N$. Da ciò segue che $\sum_I a_I^\infty z^I \in B_R$. \square

Consideriamo ora l'omomorfismo di anelli dato dalla valutazione in 0,

$$e_0 : \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

tale che $e_0(f) = f(0)$. Essendo e_0 un omomorfismo suriettivo sopra un campo, si ha che $\ker(e_0) = (z_1, \dots, z_n) = \mathfrak{m}$ è un ideale massimale di $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

PROPOSIZIONE 4.4. \mathfrak{m} è l'unico ideale massimale di $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente dimostrare che ogni elemento non appartenente ad \mathfrak{m} è invertibile. Sia $f \notin \mathfrak{m}$, $f(0) = c \neq 0$. Dal momento che $\frac{1}{c}(\frac{f}{c})^{-1} = \frac{1}{c}cf^{-1} = f^{-1}$, possiamo assumere $f(0) = 1$. Così, f può essere espressa come $f = 1 - g$, $g \in \mathfrak{m}$.
Data $f = \sum_I a_I z^I$, definiamo la *molteplicità* di f come

$$\nu(f) = \min\{i_1 + \dots + i_n : a_{i_1 \dots i_n} \neq 0\},$$

dunque si ha $\nu(g) > 0$. Sia ora $R \in]0, +\infty[^n$ tale che $\|g\|_R < +\infty$. Allora, per ogni $t \in [0, 1]$ risulta $\|g\|_{tR} \leq t^{\nu(g)}\|g\|_R$. Pertanto è possibile scegliere R tale che $\|g\|_R < 1$, e così

$$f^{-1} = \frac{1}{1-g} = \sum_{n \geq 0} g^n, \text{ da cui } \|f^{-1}\|_R \leq \sum_{n \geq 0} \|g\|_R^n < +\infty.$$

□

5. I Teoremi di Preparazione e Divisione

Diamo ora un lemma tecnico che sarà di fondamentale importanza per dimostrare i Teoremi di Preparazione e di Divisione di Weierstrass.

Sia data $\phi \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, che scriviamo come $\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^i$ e che soddisfi la seguente proprietà:

$$\exists N > 0 : \phi_i(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } i < N; \\ 1, & \text{se } i = N. \end{cases}$$

(N può essere così riguardato come la molteplicità in 0 della funzione $\phi(0, \dots, 0, z_n)$).
Definiamo, allora, due applicazioni

$$L, V : \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \longrightarrow \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\},$$

dipendenti da ϕ , tali che per ogni $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ risulti

$$L\left(\sum_{i \geq 0} f_i z_n^i\right) = \sum_{i \geq 0} f_{i+N} z_n^i \text{ e } V(f) = L(\phi f).$$

Vale un primo risultato sulla V .

PROPOSIZIONE 5.1. *Per ogni $r \in]0, +\infty[^n$ esiste $R \leq r$ tale che $V : B_R \longrightarrow B_R$ è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome B_R è di Banach V è continua, è sufficiente dimostrare la biettività. Per comodità, poniamo $z_n = t$ e $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Così $\phi(z, t) = t^N + t^N e(z, t) + \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i(z)t^i$, con $\phi_i(0) = 0$ ed $e(0, 0) = 0$. Sia $\varepsilon = \frac{1}{2(N+1)}$. A patto di scegliere un r sufficientemente piccolo, possiamo assumere che, per ogni $R \leq r$, si abbia $\|e\|_R < \varepsilon$, e $\|\phi_i\|_R \leq C(R_1 + \dots + R_{n-1})$, con C costante. Sia R tale che $\|\phi_i\|_R \leq \varepsilon R_n^{N-i}$, con $i = 0, \dots, N-1$, e sia $g \in B_R$. Allora

$$L(\phi g) = L(t^N g + t^N e g + \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i t^i g) = g + e g + \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i L(t^i g),$$

dove

$$L(t^i g) = L(t^i \sum_{h \geq 0} g_h t^h) = L\left(\sum_{h \geq 0} g_h t^{h+i}\right) = \sum_{h \geq N} g_h t^{h+i-N}.$$

Da ciò segue $\|L(t^i g)\|_R \leq \|g\|_R R_n^{i-N}$. Così

$$\|V(g) - g\|_R = \|L(\phi g) - g\|_R \leq \|e\|_R \|g\|_R + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon \|g\|_R \leq$$

$$\leq (N+1)\varepsilon\|g\|_R = \frac{\|g\|_R}{2}.$$

Posto quindi $H = Id - V$, definiamo $V^{-1}(g) = \sum_{n \geq 0} H^n(g)$. Dal momento che $\|H(g)\|_R \leq \frac{\|g\|_R}{2}$, si ha $\|H^n(g)\|_R \leq \frac{\|g\|_R}{2^n}$, e così $V^{-1}(g) \in B_R$. \square

COROLLARIO 5.2. *Sia ϕ come sopra. Allora per ogni $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ esiste un'unica $g \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tale che $L(\phi g) = f$.*

TEOREMA 5.3 (Divisione di Weierstrass). *Per ogni $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ esiste un'unica $g \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tale che $f = \phi g + r$, con r della forma $r = \sum_{i=0}^{N-1} r_i(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^i$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il precedente corollario esiste un'unica g tale che $L(\phi g) = L(f)$. Sia $r = f - \phi g$. Per la linearità di L , si ha che $L(r) = 0$, e quindi r è un polinomio in z_n di grado al più $N-1$.

Supponiamo ora $f = \phi g' + r'$, con $g' \neq g$, $r' \neq r$. Dall'espressione di r' , si ricava $L(r') = 0$, e così $L(f) = L(\phi g') = V(g')$. Essendo V un isomorfismo, si ha $g = g'$ e pertanto $r = r'$. \square

DEFINIZIONE 5.4. Sia $w \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Si dice che w è un *polinomio di Weierstrass* di grado N in z_n se $w = z_n^N + \sum_{i=0}^{N-1} w_i(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^i$, con $w_i(0) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, N-1$.

TEOREMA 5.5 (Preparazione di Weierstrass). *Sia ϕ come sopra. Allora esiste un unico elemento invertibile $e \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tale che $e\phi$ è un polinomio di Weierstrass.*

DIMOSTRAZIONE. Dal Teorema di Divisione segue che esistono unici e, r tali che $z_n^N = \phi e + r$. Dobbiamo verificare che $e(0) \neq 0$ e che $z_n^N - r$ è un polinomio di Weierstrass. Innanzitutto, si ha $z_n^N = \phi(0, z_n)e(0, z_n) + r(0, z_n)$. Inoltre $\phi(0, z_n) = z_n^N + h(z_n)$, con $\nu(h) \geq N+1$, mentre $r(0, z_n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_n^i$, il che implica $r(0, z_n) \equiv 0$ e $e(0, 0) \neq 0$. Così e è invertibile e $z_n^N - r$ è un polinomio di Weierstrass di grado N . \square

Utilizziamo tali risultati per dimostrare che l'anello $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ è un dominio a fattorizzazione unica (*UFD*).

Denotiamo $A = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}[z_n]$, $B = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Evidentemente vale l'inclusione $A \subset B$.

LEMMA 5.6. *Siano $f, g \in A$, f di Weierstrass, $f \mid g$ in B . Allora $f \mid g$ in A .*

DIMOSTRAZIONE. Dalle ipotesi si ha $f = z_n^N + \sum_{i=1}^N f_i(z)z_n^{N-i}$, $g = \sum_{i=0}^M g_i(z)z_n^i$, $g = fh$, con $h = \sum_{i \geq 0} h_i(z)z_n^i$. Supponiamo, per assurdo, che sia $h_i \neq 0$ per qualche $i > M - N$. Sia $j > M - N$ tale che $\nu(h_j) \leq \nu(h_i)$ per ogni $i > M - N$ (laddove poniamo $\nu(0) = +\infty$). Così, dall'espressione di g , si ricava $0 = g_{N+j} = h_j + \sum_{i=1}^N f_i h_{j+i}$. Osservando che $\nu(h_j) < \nu(f_i h_{j+i})$ per ogni $i = 1, \dots, N$, per come è stato scelto j , si perviene all'assurdo. \square

LEMMA 5.7. *Sia $f \in A$ di Weierstrass. Allora f è irriducibile in A se e solo se f è irriducibile in B .*

DIMOSTRAZIONE. \Rightarrow Sia $f = f_1 f_2$, con $f_1, f_2 \in B$. Vogliamo dimostrare che almeno uno degli f_i è invertibile. Se N è il grado di f come polinomio di Weierstrass, si ha $f_1(0, z_n)f_2(0, z_n) = z_n^N$. Applicando il Teorema di Preparazione alle f_i si ottiene $f_1 = e_1 g_1$, $f_2 = e_2 g_2$, dove gli e_i sono invertibili ed i g_i sono di Weierstrass, e tale scrittura è unica. Così $f = e_1 e_2 g_1 g_2$, pertanto deve essere $e_1 e_2 = 1$, $g_1 g_2 = f$. Dal momento che f è irriducibile in A , almeno uno dei g_i è invertibile in A . Quindi g_i è un polinomio di Weierstrass invertibile, e da ciò si ricava che f_i è invertibile in B .

\Leftarrow Sia $f = f_1 f_2$, con $f_i \in A$. Dal momento che f è irriducibile in B , uno degli f_i è invertibile in B , ad esempio f_1 , e così $f_1(0, 0) \neq 0$. Essendo f un polinomio di Weierstrass, si ha $f(0, z_n) = z_n^N = f_1(0, z_n)f_2(0, z_n)$, e quindi $f_1(0, z_n) = z_n^s$. D'altra

parte, si ha $f_1(0, 0) \neq 0$ e così deve essere $s = 0$. Pertanto f_1 ha grado 0 in z_n ed essendo $f_1(0) \neq 0$ è invertibile in A . \square

TEOREMA 5.8. $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ è un UFD .

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione su n .

Per $n = 0$ otteniamo un campo, e quindi l'enunciato è vero.

Supponiamolo ora vero per $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ e dimostriamolo per $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Sia $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, non invertibile, tale che $\nu(f) = m > 0$. Decomponiamo f nella somma delle sue componenti omogenee $f = f_m + f_{m+1} + \dots$, dove f_m è non identicamente nulla. A meno di cambiamenti lineari di coordinate, possiamo supporre $f_m(0, \dots, 0, 1) = 1$. Pertanto vale $f_m = z_n^m + \eta$, $\eta \in (z_1, \dots, z_{n-1})$. Applicando il Teorema di Preparazione di Weierstrass alla f , otteniamo $f = eg$, con e invertibile e g polinomio di Weierstrass di grado m in z_n . Dunque $g \in A$ e $g(0, \dots, 0, z_n) = z_n^m$. Per ipotesi induttiva A è UFD e quindi g si decompone in maniera unica in fattori irriducibili $g = g_1 \cdots g_d$, con $g_i(0, z_n) = z_n^{s_i}$ a meno di moltiplicazione per una costante. Così ogni g_i è di Weierstrass e quindi, per il Lemma precedente, g_i è anche irriducibile in B e pertanto $f = e g_1 \cdots g_d$ è una decomposizione in irriducibili in $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

Dimostriamo ora l'unicità di una tale decomposizione. Sia $f = f_1 \cdots f_r$ un'altra decomposizione di f in irriducibili. Di nuovo, $f_i(0, z_n) \mid f(0, z_n)$, ed applicando il Teorema di Preparazione di Weierstrass alle f_i si ha $f_i = e_i h_i$; pertanto $f = e_1 \cdots e_r h_1 \cdots h_r$. Essendo le e_i invertibili si ha $g_i \mid h_1 \cdots h_r$. Per il primo dei due lemmi introduttivi $g_i \mid h_1 \cdots h_r$ anche in A . Dato che A è UFD , g_i è primo in A e quindi esiste j tale che $g_i \mid h_j$, da cui $h_j = g_i e_{ij}$, con e_{ij} invertibile. Ciò dà l'unicità della decomposizione. \square

Varietà Complesse

Autori: Alessandra Bianchi e Francesco Simone Blasi

Nei prossimi paragrafi verranno introdotti alcuni elementi che caratterizzano lo studio delle varietà complesse. Dopo aver definito gli anelli locali ed averne enunciato alcune proprietà, considereremo in particolare l'anello delle funzioni oloomorfe in n variabili. Tramite l'analisi locale, e grazie ai teoremi di Weierstrass visti nei precedenti paragrafi, verranno così dimostrati gli importanti teoremi delle funzioni implicite e delle funzioni inverse. Dopo aver introdotto il concetto di topologia analitica, verrà quindi data la definizione di varietà complessa a cui faranno seguito alcuni esempi e alcuni importanti risultati quali la stratificazione di Whitney.

1. Anelli Locali

DEFINIZIONE 1.1. Un omomorfismo di \mathbb{C} -algebre

$$\varphi: \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}\{w_1, \dots, w_m\}$$

si dice *locale* se, indicando con \mathfrak{m} e \mathfrak{n} gli unici ideali massimali di $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ e $\mathbb{C}\{w_1, \dots, w_m\}$, si ha:

$$\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}.$$

Quindi se φ è un omomorfismo locale allora è determinato univocamente da $\varphi_1 = \varphi(z_1), \dots, \varphi_n = \varphi(z_n)$.

DEFINIZIONE 1.2. (A, \mathfrak{m}) si dice un *anello locale*. A ha una struttura naturale di gruppo topologico e gli intorno fondamentali di 0 sono \mathfrak{m}^d con $d \in \mathbb{C}$.

Questa definizione è equivalente a dire che A è Noetheriano e che le nonunità formano un ideale.

LEMMA 1.3. Per un anello locale (A, \mathfrak{m}) vale la seguente:

$$(A, \mathfrak{m}) \text{ è di Hausdorff se e solo se } \bigcap_{d=0}^{\infty} \mathfrak{m}^d = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Se è T_2 supponiamo per assurdo che esista $a \neq 0$ con $a \in \bigcap_{d=0}^{\infty} \mathfrak{m}^d$. Si ha quindi che:

$$\exists d_1 \text{ tale che } \mathfrak{m}^{d_1} \cap (a + \mathfrak{m}^{d_2}) = \emptyset$$

e questa è una contraddizione perché a appartiene a tutti gli \mathfrak{m}^d ed in particolare ad \mathfrak{m}^{d_1} .

Supponiamo invece che $\bigcap_{d=0}^{\infty} \mathfrak{m}^d = 0$; dati $a \neq b$ allora $\exists d \gg 0$ tale che $a - b \notin \mathfrak{m}^d$ e quindi

$$(a + \mathfrak{m}^d) \cap (b + \mathfrak{m}^d) = \emptyset.$$

Se infatti avessi che $x \in (a + \mathfrak{m}^d) \cap (b + \mathfrak{m}^d)$ varrebbe

$$x = a + \alpha = b + \beta \implies a - b = \alpha - \beta \in \mathfrak{m}^d,$$

che contraddice l'ipotesi. Questo conclude la dimostrazione. \square

Vediamo ora due esempi.

Sia $A = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$; l'ideale massimale corrisponde dunque alle funzioni con molteplicità maggiore di 0 ed è evidente che elevando a potenza l'ideale risulta $\bigcap_{d=0}^{\infty} \mathfrak{m}^d = 0$ e di conseguenza l'anello locale è di Hausdorff.

2. Studio degli Omomorfismi Locali

Consideriamo ora due omomorfismi locali:

$$\begin{aligned} \varphi, \psi: \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} &\rightarrow \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \\ \text{tali che: } \varphi(z_i) &= \psi(z_i), \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Come prima osservazione notiamo che per definizione di omomorfismo locale si ha banalmente $\varphi = \psi$ su $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.

Notiamo inoltre che data la struttura della topologia \mathfrak{m} -adica data sopra si ha che φ, ψ sono continue in quanto, essendo locali, vale:

$$\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n} \implies \varphi(\mathfrak{m}^d) \subset \mathfrak{n}^d.$$

Osserviamo infine che $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ è denso nell'anello locale $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, in quanto, per ogni $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ e per ogni intorno \mathfrak{m}^d , si ha:

$$f + \mathfrak{m}^d \cap \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \neq \emptyset.$$

Conseguenza di tutto ciò è che l'omomorfismo locale φ è univocamente determinato da $\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_n)$.

LEMMA 2.1. *Si consideri l'applicazione:*

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, t\} &\rightarrow \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \\ z_i &\mapsto z_i \\ t &\mapsto f(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Allora $\ker(\varphi) = (t - f(z_1, \dots, z_n))$.

DIMOSTRAZIONE. È ovvio che $\ker(\varphi) \supset (t - f(z_1, \dots, z_n))$. Per dimostrare l'altra inclusione consideriamo $g \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, t\}$. Vogliamo sfruttare il teorema di divisione di Weierstrass e per fare ciò osserviamo che $(t - f(z_1, \dots, z_n))$ è di fatto un polinomio di Weierstrass in t di grado 1. Quindi possiamo scrivere:

$$g = h \cdot (t - f(z_1, \dots, z_n)) + r(z_1, \dots, z_n)$$

e di conseguenza:

$$\varphi(g) = \varphi(r) = r,$$

visto che r dipende solo da z_1, \dots, z_n .

Quindi siamo giunti alla conclusione che $f(z_1, \dots, z_n)$ è nel nucleo se e solo se il resto si annulla, e cioè:

$$g = h \cdot (t - f(z_1, \dots, z_n)),$$

concludendo così la dimostrazione. \square

Dimostriamo ora due teoremi molto importanti: il Teorema delle funzioni implicite e il Teorema delle funzioni inverse. Entrambi sono spezzati in due parti di cui la prima è di seguito mentre la seconda segue ad ulteriori osservazioni.

TEOREMA 2.2 (delle Funzioni Implicite I).

Siano $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$, con $f_i(0) = 0$ per ogni i e si consideri l'omomorfismo naturale

$$\varphi : \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}}{(f_1, \dots, f_m)}.$$

Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. φ è un isomorfismo.
2. φ è suriettivo.
3. $\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j})(0) \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. 1 \implies 2 è ovvio

2 \implies 3:

$\forall j = 1, \dots, m$ esistono delle funzioni $h_j(x), K_{l,j}(x, y)$ tali che si può scrivere:

$$y_j = h_j(x) + \sum_{l=1}^m K_{l,j}(x, y) f_l(x, y),$$

dove abbiamo usato la notazione $x = x_1, \dots, x_n$ e $y = y_1, \dots, y_m$, guardandone solo i termini di grado minore o uguale a 1, perché solo questi ci interessano, si ha:

$$y_j = h_j^{(1)}(x) + \sum_{l=1}^m K_{l,j} f_l^{(1)}(x, y),$$

dove questa volta le $K_{l,j}$ sono necessariamente delle costanti, da ciò segue banalmente che $h_j(0) = 0$.

Ponendo $x = 0$ otteniamo $y_j = \sum_{l=1}^m K_{l,j} f_l(0, y)$ e di conseguenza la matrice di nostro interesse ha determinante non nullo quando viene calcolata in zero.

3 \implies 1 Si dimostra per induzione su m .

A meno di combinazioni lineari e cambi di coordinate possiamo supporre che si abbia $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0) = \delta_{ij}$ (delta di Kronecker); possiamo quindi scrivere

$$f_m(x, y) = y_m + h_m(x) + \varphi_m(x, y),$$

dove la $\varphi_m(x, y)$ contiene tutte le variabili tranne la y_m , e con:

$$\begin{aligned} \nu(h_m) &\geq 1 \\ \nu(\varphi_m) &\geq 2. \end{aligned}$$

D'altronde ogni f_m è una funzione regolare in y_m di grado uno e di conseguenza per il Teorema di preparazione di Weierstrass la possiamo scrivere come il seguente prodotto:

$$f_m(x, y) = e \cdot g_m$$

dove $e \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ con $e(0) \neq 0$, e dove g_m è un polinomio di Weierstrass in y_m di grado uno, e quindi lo si può scrivere come:

$$g_m = y_m - K_m(x, y_1, \dots, y_{m-1})$$

con $K_m(0) = 0$.

Consideriamo ora:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} & \xrightarrow{\psi_m} & \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}\} \\ y_m & \longrightarrow & K_m. \end{array}$$

ψ_m è suriettiva e per il Lemma dimostrato prima $\text{Ker}(\psi_m) = (g_m) = (y_m - K_m)$.

Abbiamo allora la possibilità di tracciare il seguente diagramma dove nella sua parte inferiore abbiamo già indicato l'isomorfismo che si viene a creare passando al nucleo :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} & \xrightarrow{\psi_m} & \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} \xrightarrow{\varphi} & \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}}{(f_1, \dots, f_m)} & \xrightarrow{\sim} \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}\}}{(\psi(f_1), \dots, \psi(f_{m-1}))}
\end{array}$$

Possiamo quindi scrivere $f_i = y_i + h_i(x) + \varphi_i(x, y)$, da cui

$$\psi(f_i) = y_i + h_i(x) + \varphi(x, y_1, \dots, y_{m-1}), \text{ con } i < m,$$

che implica:

$$\left(\frac{\partial \psi(f_i)}{\partial y_j}\right)(0) = \text{Id}_{m-1}.$$

Quindi l'ipotesi induttiva ci garantisce che:

$$\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}\}}{(\psi(f_1), \dots, \psi(f_{m-1}))}$$

è un isomorfismo, ma allora banalmente segue che anche:

$$\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}}{(f_1, \dots, f_m)}$$

è un isomorfismo, concludendo così la dimostrazione. \square

TEOREMA 2.3 (delle Funzioni Inverse I). *Sia φ l'applicazione seguente*

$$\begin{aligned}
\varphi: \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} &\rightarrow \mathbb{C}\{w_1, \dots, w_m\} \\
\varphi(z_i) &= f_i(w)
\end{aligned}$$

Allora: φ è un isomorfismo $\iff \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right)(0) \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = \frac{\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m\}}{(z_1 - f_1, \dots, z_n - f_n)}$, consideriamo quindi il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m\}}{(z_1 - f_1, \dots, z_n - f_n)} & & \\
\eta \uparrow & \swarrow & \\
\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{w_1, \dots, w_m\}
\end{array}$$

Possiamo immediatamente osservare che:

$$\mathbb{C}\{w_1, \dots, w_m\} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m\}}{(z_1 - f_1, \dots, z_n - f_n)}$$

è un isomorfismo per il Teorema delle Funzioni implicite, infatti derivando rispetto alle z_1, \dots, z_n le funzioni $z_1 - f_1, \dots, z_n - f_n$ si ottiene banalmente l'identità. Inoltre riapplicando nuovamente questo teorema a η si conclude che:

$$\eta \text{ è un isomorfismo } \iff \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right)(0) \neq 0$$

e ciò conclude la dimostrazione, infatti η isomorfismo equivale a dire, considerando la struttura del diagramma, φ isomorfismo, concludendo così la dimostrazione. \square

Consideriamo ora $\mathcal{U} \in \mathbb{C}^n$ aperto connesso, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, $f \neq 0$.

Indichiamo con $V(f) = \{z \in \mathcal{U} : f(z) = 0\}$. $V(f)$ è chiuso e non ha parte interna per il Principio di identità.

TEOREMA 2.4.

$$g : \mathcal{U} \setminus V(f) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ olomorfa e limitata.}$$

Allora g si estende a $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Principio di identità basta vedere che $\forall x \in V(f)$, g si estende ad un intorno aperto di x .

Possiamo supporre a meno di traslazioni che $x = 0 \in \mathbb{C}^n$, e che $f(0, \dots, 0, z_n) \neq 0$, sia una funzione regolare in z_n di grado d . Quindi esiste un poldisco $\Delta(0, (\tau_1, \dots, \tau_n)) = A \subset \bar{A} \subset \mathcal{U}$ tale che su di esso possiamo applicare il Teorema di preparazione di Weierstrass, cioè $f = e \cdot h$ dove $e \neq 0$ in A e h è un polinomio di Weierstrass in z_n di grado d . Possiamo quindi scrivere:

$$h = z_n^d + \sum_{i < d} h_i z_n^i,$$

se $\|z_n\| = \tau_n$, allora $h(0, z_n) \neq 0$. La proiezione:

$$\pi : \{\|z_n\| = \tau_n\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

è un'applicazione propria e quindi:

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che se } \|z_i\| \leq \delta \text{ con } i = 1, \dots, n-1 \text{ e } \|z_n\| = \tau_n$$

allora $h(z) \neq 0$.

Quindi nell'intorno $\Delta(0, (\delta, \dots, \delta, \tau_n))$ possiamo rappresentarla tramite l'integrale

$$g(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\|\xi\|=\tau_n} \frac{g(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} d\xi,$$

questa è olomorfa e prendendo $z_1, \dots, z_{n-1} = \text{cost}$ ci dà la formula nel caso di 1 variabile. In questo modo abbiamo esteso la funzione g ad un intorno aperto di x ; applicando ora il Principio di identità si ottiene il risultato voluto, concludendo così la dimostrazione. \square

DEFINIZIONE 2.5. Siano $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}_{z_i}^n, \mathcal{V} \subset \mathbb{C}_{w_j}^m$ aperti.

Allora:

$$F = (F_1, \dots, F_m): \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$$

si dice *olomorfa* se e solo se ogni F_i è olomorfa.

Osserviamo ora che data $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ olomorfa e dati due punti $u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}$ e $f \in \mathcal{O}$, f definisce il morfismo

$$F^*: \mathcal{O}_{v,\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{u,\mathcal{U}} \\ (A, f) \longrightarrow (F^{-1}, f \circ F).$$

F^* è ben definita, è un omomorfismo di anelli (\mathbb{C} -algebre) ed è locale. Quest'ultima proprietà è evidente se consideriamo che l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{v,\mathcal{V}}$ che è

$$\mathfrak{m}_{v,\mathcal{V}} = \{(A, f) : f(u) = 0\}.$$

Componendo si ottiene quindi:

$$f \circ F(u) = 0 \implies f \circ F \in \mathfrak{m}_{u,\mathcal{U}}$$

che dimostra che F^* è un omomorfismo locale.

Vale anche il viceversa, ossia dato un omomorfismo locale di \mathbb{C} -algebre $\varphi: \mathcal{O}_{v,\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{u,\mathcal{U}}$, esistono intorni aperti $v \in \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}, u \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ e $F: \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}'$ olomorfa, tale che $F^* = \varphi$. Per chiarire le osservazioni appena fatte facciamo un esempio di grande importanza. Siano $0 = u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n, 0 = v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{C}^m$, allora:

$$\mathcal{O}_{v,\mathcal{V}} = \mathbb{C}\{w_1, \dots, w_m\} \text{ e } \mathcal{O}_{u,\mathcal{U}} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}.$$

È evidente che le $\varphi(w_i) = f_i$ sono funzioni olomorfe appartenenti a $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Prendiamo quindi un aperto \mathcal{U}' dove le f_i sono definite e definiamo:

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{U}' \longrightarrow \mathcal{V} \\ F &= (f_1, \dots, f_m). \end{aligned}$$

Allora si vede immediatamente che $F^* = \varphi$, poiché

$$F^*(w_i) = w_i \circ F = f_i = \varphi(w_i),$$

(coincidendo sui generatori si ha l'uguaglianza cercata).

Alla luce delle nuove conoscenze completiamo il Teorema delle funzioni implicite e il Teorema delle funzioni inverse:

TEOREMA 2.6 (delle Funzioni Inverse II). *Siano $U, V \subset \mathbb{C}^n$ aperti e sia data*

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow V \text{ olomorfa } f = (f_1, \dots, f_n). \\ u &\rightarrow v \end{aligned}$$

Se $\det(\frac{\partial f_i}{\partial z_j})(0) \neq 0$, allora f è localmente invertibile, esistono cioè aperti $u \in U' \subset U, v \in V' \subset V$ con $f(U') = V'$ e $g: V' \rightarrow U'$ tali che $g = f^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo: $f^*: \mathcal{O}_{u, \mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{u, \mathcal{U}}$, non è restrittivo supporre $u = v = 0$. Per quanto visto in precedenza prendiamo $f^*(z_i) = f_i$ e si ha che, grazie al Teorema delle funzioni implicite I, se $\det(\frac{\partial f_i}{\partial z_j})(0) \neq 0$, allora f^* è un isomorfismo e quindi esiste una $g^* = (f^*)^{-1}$ indotta da una g , funzione olomorfa definita in un aperto generalmente più piccolo di V . Questo conclude la dimostrazione. \square

DEFINIZIONE 2.7. Un sistema di *coordinate locali* in $u \in \mathbb{C}^n$ è dato da $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_{u, \mathbb{C}^n}$ con $u_i(0) = 0$ tali che:

$$1) \det\left(\frac{\partial u_i}{\partial z_j}\right)(u) \neq 0$$

oppure 2) $(u_1, \dots, u_n): u \in U \rightarrow \mathbb{C}^n$ è un isomorfismo locale.

TEOREMA 2.8 (delle Funzioni Implicite). *Siano $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}_{u, \mathbb{C}^n} \subset \mathcal{O}_{u, \mathbb{C}^n}$ tali che:*

$$\text{rango}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right) = r$$

allora f_1, \dots, f_r si estendono a coordinate locali.

3. I chiusi Analitici

Si consideri un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ (nella topologia classica) e sia $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ l'anello delle funzioni olomorfe su \mathcal{U} . Per ogni sottinsieme $E \subset \mathcal{O}(\mathcal{U})$, si definisce il luogo degli zeri di E come:

$$V(E) = \{z \in \mathcal{U} : f(z) = 0, \forall f \in E\}$$

DEFINIZIONE 3.1. Un sottinsieme X di \mathcal{U} si dice *chiuso analitico* se $\forall x \in \mathcal{U}$ esiste un aperto $W \subset \mathcal{U}$, con $x \in W$, e un sottinsieme $E \subset \mathcal{O}(W)$ tale che vale:

$$(1) \quad X \cap W = V(E)$$

OSSERVAZIONE 3.2. Dalla definizione segue che un chiuso analitico è anche un chiuso nella topologia classica.

Un chiuso analitico può essere dunque pensato localmente come il luogo degli zeri di un qualche insieme di funzioni olomorfe.

Valgono le seguenti proprietà:

1. $\emptyset = V(1)$; $\mathcal{U} = V(0)$.
2. se $X, Y \subset \mathcal{U}$ sono chiusi analitici $\implies X \cup Y$ è chiuso analitico.
3. se $X, Y \subset \mathcal{U}$ sono chiusi analitici $\implies X \cap Y$ è chiuso analitico.

Verifichiamo tali proprietà:

1. risulta immediata dalla definizione.
2. X, Y chiusi analitici $\implies \forall x \in \mathcal{U}$ esistono W_1, W_2 aperti di \mathcal{U} e $E_1 \subset W_1, E_2 \subset W_2$ tali che:

$$X \cap W_i = V(E_i), \quad i = 1, 2$$

Si considera l'aperto $W_1 \cap W_2$ e l'insieme $E_1 \cdot E_2 \subset \mathcal{O}(W_1 \cap W_2)$ con $E_1 \cdot E_2 = \{f \cdot g : f \in E_1 \text{ e } g \in E_2\}$; $\forall x \in \mathcal{U}$ vale

$$(X \cup Y) \cap (W_1 \cap W_2) = V(E_1 \cdot E_2),$$

ovvero $X \cup Y$ è un chiuso analitico.

3. Del tutto simile a quella del punto 2 con $E_1 \cup E_2 \subset \mathcal{O}(W_1 \cap W_2)$.

4. Varietà Complesse

DEFINIZIONE 4.1. Sia M uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile. M è una *varietà complessa* di dimensione n se esiste un ricoprimento aperto, $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, tale che:

- $\forall \alpha$ esiste un omeomorfismo ϕ_{α} e un aperto $V_{\alpha} \in \mathbb{C}^n$ con

$$\phi_{\alpha} : U_{\alpha} \longrightarrow V_{\alpha}$$

($\{\phi_{\alpha}\}_{\alpha}$ dette coordinate locali)

- $\forall \alpha, \beta$ tali che $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$, l'applicazione

$$\phi_{\alpha, \beta} : \phi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \longrightarrow \phi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

è una funzione olomorfa (cambio di coordinate locali).

ESEMPIO 4.2. Consideriamo un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$. Sia $X \subset U$ e supponiamo che $\forall x \in X$ esista un aperto $V_x \subset U$ ed esistano $u_1, \dots, u_s : V_x \longrightarrow \mathbb{C}$ coordinate locali, tali che:

$$V_x \cap X = \{z \in \mathbb{C}^n : u_1(z) = \dots = u_s(z) = 0\}$$

$\implies X$ è una varietà complessa di dimensione $n - s$.

Basta infatti considerare il ricoprimento $X = \bigcup_{x \in X} (V_x \cap X)$ e su ciascun aperto le coordinate locali ristrette a $V_x \cap X$, ovvero

$$(u_{s+1}, \dots, u_n) : V_x \cap X \longrightarrow \mathbb{C}^{n-s}$$

.

ESEMPIO 4.3. Sia $f \in \mathcal{O}(U)$ con $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto; definiamo l'insieme X come:

$$X = \{z \in U : f(z) = 0, df(z) \neq 0\}.$$

$\implies X$ è una varietà complessa di dimensione $n - 1$.

Si considerino gli aperti $V_i \subset X$, tale che $\forall v \in V_i : \frac{\partial f(v)}{\partial z_i} \neq 0$, e il ricoprimento $X = \bigcup_i V_i$. Su ognuno di questi intorno si considerino le coordinate locali $z_1, \dots, z_{i-1}, f, z_{i+1}, \dots, z_n$, tali che

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}.$$

Ma per l'esempio precedente questa è esattamente una varietà di dimensione $n - 1$.

5. Stratificazione di Whitney

DEFINIZIONE 5.1. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e consideriamo un ideale $I \subset \mathcal{O}(U)$, ideale finitamente generato del tipo $I = (f_1, \dots, f_s)$.

Sia poi $X = V(I)$, il luogo degli zeri delle funzioni che appartengono ad I , e per $p \in X$ definiamo le seguenti:

$$(2) \quad r(p) = \max_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n}} \text{rango} \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p) \right)$$

$$(3) \quad r = \max_{p \in X} r(p)$$

Definiamo poi i seguenti insiemi:

$$(4) \quad C = \{p \in X : r(p) < r\} \quad M = \{p \in X : r(p) = r\}$$

OSSERVAZIONE 5.2. C è un chiuso analitico in quanto luogo degli zeri delle funzioni appartenenti ad I , con $r(p) < r$. Essendo X chiuso analitico, per definizione, e poiché vale $X = C \cup M$, ne risulta che M è aperto in X .

Arriviamo infine ad affermare la seguente importante proposizione:

PROPOSIZIONE 5.3. Sia $M = \{p \in X : r(p) = r\}$. Allora M è una varietà di dimensione $n - r$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un punto $p \in M$; per definizione di M vale $r(p) = r$ ovvero esistono (a meno di permutazioni) delle funzioni $f_1, \dots, f_r \in I$ tale per cui

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p) \right|_{i,j=1,\dots,r} \neq 0$$

Possiamo definire un sistema di coordinate locali dato da: $x_1 = f_1, \dots, x_r = f_r, x_{r+1} = z_{r+1}, \dots, x_n = z_n$. Consideriamo poi un polidisco $\Delta \ni p$; non è restrittivo supporre $p = 0$ e dunque $\Delta = \{x \in \mathbb{C}^n : |x_i| \leq a_i, \forall i\}$. Possiamo inoltre supporre che $\Delta \cap C = \emptyset$.

Dimostrare che M è una varietà di dimensione $n - r$ è equivalente a mostrare che $M \cap \Delta = \{x_1 = \dots = x_r = 0\}$.

Definiamo $M^* = \{x_1 = \dots = x_r = 0\}$; valgono:

$$M^* \subset \Delta \quad M \cap \Delta \subset M^*.$$

Rimane da verificare che $M^* \subset M$, da cui $M^* \subset M \cap \Delta$ e quindi $M^* = M \cap \Delta$.

Sia μ una $(r+1)$ -upla del tipo: $\mu : 1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{r+1} \leq n$.

Definiamo l'applicazione $\Phi_\mu : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ come

$$\Phi_\mu(g) = \left| \frac{\partial (f_1, \dots, f_r, g)}{\partial z_{\mu_1} \dots z_{\mu_{r+1}}} \right|.$$

Vale in particolare che $\Phi_\mu : I(X) \rightarrow I(X)$, dove con $I(X)$ abbiamo indicato l'insieme delle funzioni che si annullano su X . Sia $g \in I(X)$; per mostrare che $M^* \subset M$ è sufficiente vedere che $g|_{M^*} = 0$, ovvero

$$\frac{\partial^k g}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_k}}(p) = 0 \quad \forall \alpha_1 > r, \dots, \alpha_k > r.$$

Verifichiamo quest'ultima; se $l > r$ vale:

$$\frac{\partial g}{\partial x_l}(p) = \det \begin{pmatrix} Id_{r,r} & c_r(p) \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial x_l}(p) \end{pmatrix} = \det \left(\frac{\partial (f_1, \dots, f_r, g)}{\partial x_1 \dots \partial x_r \partial x_l}(p) \right),$$

dove abbiamo indicato con $Id_{r,r}$ l'identità in $r \times r$ e con $c_r(p)$ un vettore di \mathbb{C}^r , corrispondente alle derivate parziali di g in x_1, \dots, x_l . Facendo un cambio di variabili, vale inoltre la seguente:

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_r, g)}{\partial x_1 \dots \partial x_r \partial x_l} \right) = \det \left(\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_r, g)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \right) \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right) \right) = \sum_{\mu} \phi_{\mu}(g) \cdot T_l^{\mu},$$

con $T_l^{\mu} \in \mathcal{O}(\Delta)$. Abbiamo quindi espresso le derivate parziali di g tramite la funzione $\phi_{\mu}(g)$; questo significa che

$$g \in I(X) \implies \frac{\partial g}{\partial x_l} \in I(X),$$

cioè anche le derivate prime di g rispetto a x_l , $l > r$ si annullano in X .

Con un procedimento analogo si calcola, per ogni $l, k > r$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{\eta} \left(\sum_{\mu} \phi_{\eta} \phi_{\mu}(g) T_l^{\eta} T_k^{m\mu} \right) + \sum_{\mu} \phi_{\mu}(g) R,$$

dove R indica la derivata di T_{μ}^l .

Le derivate di g sono quindi del tipo $(\phi_{\mu}(g), \phi_{\mu} \phi_{\eta}(g), \dots)$ ed appartengono tutte ad $I(X)$.

Vale dunque che $g|_{M^*} = 0$ come volevamo dimostrare. \square

6. Polinomi Irriducibili: Alcuni Risultati

Sia A un dominio di integrità con caratteristica 0 e indichiamo con $A[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in A .

DEFINIZIONE 6.1. Sia $p \in A[x]$ della forma

$$p(x) = a_0 x^n + \dots + a_n \quad a_0 \neq 0$$

e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le radici di p in una chiusura algebrica di A . Definiamo il *discriminante di p* come

$$(5) \quad \Delta(p) = a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

Osserviamo i seguenti fatti inerenti al discriminante di un polinomio:

1. $\Delta(p)$ è un polinomio nelle variabili a_0, a_1, \dots, a_n omogeneo di grado $2n - 2$;
2. $\Delta(p) = 0 \iff p$ ha radici multiple.

PROPOSIZIONE 6.2. *Sia A un dominio a fattorizzazione unica di caratteristica 0 e sia $p(x) \in A[x]$ un polinomio irriducibile. Allora $\Delta(p) \neq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Dal Lemma di Gauss vale che p è un polinomio irriducibile in $K[x]$, dove abbiamo indicato con K le frazioni di A .

Supponiamo esista $\alpha \in \overline{K}$ radice doppia; allora l'indice dell'estensione $K[\alpha]$ su K è

$$[K[\alpha] : K] = \deg p = n.$$

Consideriamo poi la derivata prima di p , ovvero il polinomio p' ; poiché α è una radice doppia, $p'(\alpha) = 0$. Ma questo è assurdo in quanto il grado di p' è $n - 1$ (poiché A ha caratteristica 0) mentre l'estensione $K[\alpha]$ ha grado n .

Abbiamo quindi mostrato che un polinomio irriducibile non può avere radice multiple. Per ciò che abbiamo osservato sopra, questo implica che $\Delta(p) \neq 0$. \square

Proveremo ora alcuni risultati importanti riguardanti i polinomi irriducibili.

PROPOSIZIONE 6.3. *Si consideri un polinomio $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Supponiamo che f sia irriducibile.*

Allora esiste un aperto $U \ni 0$ tale che $f \in \mathcal{O}(U)$

Definendo inoltre $V = \{x \in U : f(x) = 0\}$ e $V_s = \{x \in V : df(x) \neq 0\}$, vale che:

1. $\emptyset \neq V_s$ è connesso
2. $\overline{V_s} = V$ (chiusura rispetto alla topologia classica).

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre per il teorema di preparazione che f sia un polinomio di Weierstrass e dunque della forma:

$$f(z) = z_n^d + \sum_{i < d} f_i(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^i.$$

Poiché f è irriducibile vale che $\Delta(f) \in \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ è diverso da 0.

Prendiamo l'aperto U definito da $U = \Delta^{n-1}(0, r) \times \Delta^1(0, r_n)$ e consideriamo $Z = \{x \in V : \frac{\partial f}{\partial z_n}(x) \neq 0\} \subset V_s$.

Sia π l'applicazione che proietta gli elementi di V sulle prime $n - 1$ coordinate ovvero:

$$\begin{aligned} \pi: V &\rightarrow \Delta^{n-1} \\ z &\rightarrow (z_1, \dots, z_{n-1}) \end{aligned}$$

Si osservi che questa è un'applicazione propria poiché possiamo pensare a V come sottoinsieme di $\Delta^{n-1} \times \mathbb{P}^1$; in particolare π è una mappa chiusa.

Definiamo ora l'insieme $D = \{z \in \mathbb{C}^{n-1} : \Delta(f) = 0\} \subset \Delta^{n-1}$.

Vale allora che

$$D = \pi \left(\left\{ z \in V ; \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) = 0 \right\} \right) \implies Z = \pi^{-1}(\Delta^{n-1} \setminus D) \subset V_s.$$

Enunciamo ora il seguente:

LEMMA 6.4. *Sia $Z = \pi^{-1}(\Delta^{n-1} \setminus D)$ e sia $W \subset Z$ una componente connessa. Allora $\overline{W} = V$ e $W = Z$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo ancora l'applicazione

$$\pi: Z \rightarrow \Delta^{n-1} \setminus D =: H.$$

Z è un rivestimento a d -fogli di H mentre $W \subset Z$ è un rivestimento a t -fogli con $1 \leq t \leq d$ di H .

Se $u \in H$, $\pi^{-1}(u) \cap W = \{(u, u_1), \dots, (u, u_t)\}$, con $u_i \in \mathbb{C}$.

Sia $h \in \mathbb{C}[z_n]$ e definiamo la seguente applicazione:

DEFINIZIONE 6.5. Sia $R_h \in \mathcal{O}(\Delta^{n-1})[z_n]$ dato da:

$$R_h(u, z_n) = \prod_{i=1}^t (h(z_n) - h(u_i))$$

Se $u \in H$, e quindi u_1, \dots, u_t variano su un disco limitato, vale allora che

$$R_h(u, z_n) = \sum_{j=1}^t \pm h(z_n)^j \cdot \sigma_j(h(u_1) \dots h(u_t)),$$

dove le σ_j sono funzioni limitate e che quindi possono estendersi a tutto il polidisco Δ^{n-1} .

Valgono le seguenti:

1. $R_h|_W \equiv 0$, per come è definita la funzione;

2. Se $u \in D$ allora $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n$, $u^n \in \Delta^{n-1} \setminus D$,

ovvero possiamo scrivere gli elementi di D come limite di elementi in $\Delta^{n-1} \setminus D$. Infatti, essendo D un chiuso analitico, non ha punti interni e posso dunque scriverlo come limite di elementi esterni.

Vogliamo ora utilizzare la mappa R_h per dimostrare che $V \subset \overline{W}$; il viceversa, cioè $\overline{W} \subset V$ è ovvio.

Procediamo per assurdo.

Supponiamo che $\exists(u, u_0) \in V \setminus \overline{W}$. Allora

$$\overline{W} \cap \pi^{-1}(u) = \{u_1, \dots, u_s\}, \quad u_i \neq u_0, \quad \forall i.$$

Sia $h \in \mathbb{C}[z_n]$ tale che: $h(u_0) = 1$ e $h(u_i) = 0$, $\forall i$

allora $R_h(u, u_0) = \prod_{i=1}^t (1 - h(u_i)) = 1$, con $u_i \in \overline{W} \cap \pi^{-1}(u)$,
cioè abbiamo trovato una funzione che non si annulla.

Dunque R_h non è identicamente nullo, e quindi $f \nmid R_h$, il che implica che il risultante $R(f, R_h) \neq 0$.

Ma questa è una contraddizione poiché $\forall u \in \Delta^{n-1}$ esiste $u_1 \in \mathbb{C}$ tale che se

$$(u, u_1) \in \overline{W} \text{ allora } R_h(u, u_1) = f(u, u_1) = 0,$$

quindi u è una radice comune e questo implica che $R(R_h, f) = 0$.

Ne risulta infine che $V \subset \overline{W}$, e quindi $\overline{W} = V$ e $W = Z$, cioè in particolare Z è connesso. \square

Applicando il risultato del lemma (6.4), si ottiene che:

$Z \subset V_s \subset V$, con Z insieme aperto, denso e connesso e V_s varietà.

Allora V_s è connesso e $V_s = V$, come si voleva dimostrare. \square

Consideriamo ora una varietà M , $\dim M = n$; sia $V \subset M$ una ipersuperficie chiusa, ovvero V tale che:

1. V è chiusa;
2. $\forall u \in V$, $\exists U \subset M$ intorno di u tale che $V \cap U = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}$.

OSSERVAZIONE 6.6. Non è restrittivo supporre che $f \in \mathcal{O}_{U,M}$ (che è un dominio a fattorizzazione unica) sia in forma ridotta; a meno di restringere U si ha quindi $f = f_1^{a_1} f_2^{a_2} \dots f_s^{a_s}$ da cui ancora vale:

$$V \cap U = \{f_1 = \dots = f_s = 0\}$$

Consideriamo $V_s = \{z \in V : df(z) \neq 0\}$; allora f è un'equazione locale e dunque $V_s \neq \emptyset$. Possiamo infatti supporre che $f = f_i \dots f_s$ e che ci siano delle coordinate locali z_1, \dots, z_n tali che f_i è un polinomio di Weierstrass in z_n , $\forall i$.

Vale che $\frac{\partial f_i}{\partial z_n} \neq 0 \quad \forall i$ da cui si verifica

$$\frac{\partial f}{\partial z_n} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial z_n} \prod_{j \neq i} f_j.$$

Dunque non vi sono fattori comuni fra $\frac{\partial f}{\partial z_n}$ e f , ovvero $f_i \nmid \frac{\partial f}{\partial z_n}$. Si deduce che $V(f_i) \not\subset V(\frac{\partial f}{\partial z_n}) = V_{\text{sing}} = \{ \text{punti singolari di } V \}$, ovvero esistono dei punti lisci di V .

Sia $V^* \subset V$ l'aperto dei punti lisci; V^* è una varietà e vale la seguente:

PROPOSIZIONE 6.7. *Sia $H \subset V^*$ una componente connessa.*

Allora \overline{H} è un'ipersuperficie irriducibile, ovvero $\overline{H} \neq V_1 \cup V_2$, V_1 e V_2 proprie.

DIMOSTRAZIONE. Sia $v \in \overline{H} \subset V$; sappiamo che localmente, in un intorno di v , vale che: $V = \{f_1, \dots, f_s\}$, f_i irriducibili.

Inoltre, $\forall i$ esiste un intorno $v \in U_i$ tale che $Z_i := \{z \in \mathbb{C}^n : f_i(z) = 0, df_i(z) \neq 0\}$ è

connesso e $\overline{Z_i} = \{f_i(z) = 0\}$. Abbiamo due possibilità: $Z_i \subset H$ oppure $Z_i \cap H = \emptyset$; in entrambi i casi vale che

$$\overline{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, : \prod_{i: Z_i \subset H} f_i(z) = 0\}$$

□

DEFINIZIONE 6.8. Sia M una varietà e $V \subset M$ un chiuso analitico. Si definisce V *irriducibile* se non è unione di chiusi analitici propri.

ESEMPIO 6.9. M è connessa se e solo se M è irriducibile

ESEMPIO 6.10. Sia $V \subset M$ un'ipersuperficie chiusa;
 V irriducibile se e solo se $V^* = V_s = \{\text{punti lisci di } V\}$ è connesso.
In questo caso si dice che V è un divisore primo di M .

Coomologia (di Čech) dei Fasci

Autori: Simone Diverio e Fabio Massimo Marchetti

In questo capitolo ci si occuperà dei fasci e della loro coomologia (di Čech). Verranno introdotte le categorie di prefascio e fascio e i loro morfismi, degli spazi étalé su uno spazio topologico e se ne illustreranno i legami (ad esempio con la “fascificazione” canonica di un prefascio).

La coomologia di Čech di un fascio X viene poi discussa, assieme con le sue proprietà funtoriali di esattezza. Particolare attenzione si darà poi ad alcune famiglie di fasci aciclici, i cui gruppi di coomologia cioè si annullano a partire dal primo; il concetto di risoluzione e il teorema di De Rham-Weil (ovvero teorema di De Rham astratto) saranno poi affrontati per concludere con alcuni elementi di successioni spettrali e una loro semplice applicazione alla teoria coomologica dei fasci: il teorema di Leray.

1. Prefasci e spighe

DEFINIZIONE 1.1. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio* \mathcal{F} di *insiemi* su X è dato da:

- : (a) ad ogni aperto U di X , si associa un insieme $\mathcal{F}(U)$ (chiamato l'insieme delle *sezioni* di \mathcal{F} sopra U)
- : (b) ad ogni coppia di aperti $V \subseteq U$ di X , corrisponde una *mappa restrizione* $\varrho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ tale che
 - : (b1) per ogni U si ha $\varrho_U^U = id_U$
 - : (b2) ogni qualvolta si hanno tre aperti $W \subseteq V \subseteq U$, si ha $\varrho_W^U = \varrho_W^V \circ \varrho_V^U$, ossia

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}(W) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & \mathcal{F}(V) &
 \end{array}$$

commuta.

Un *prefascio di gruppi abeliani* sopra X è un prefascio \mathcal{F} di insiemi tale che:

- : (a') ogni $\mathcal{F}(U)$ ha una data struttura di gruppo abeliano
- : (b') ogni mappa restrizione ϱ_V^U è un omomorfismo di gruppi rispetto a queste strutture.

ESEMPIO 1.2. Sia A un insieme assegnato (o gruppo abeliano). Allora il *prefascio costante* \mathcal{A}_X su X è dato da

$$\begin{cases}
 \mathcal{A}_X(U) = A & \text{per } U \text{ aperto di } X \\
 \varrho_V^U = id_A : \mathcal{A}_X(U) \rightarrow \mathcal{A}_X(V) & \text{per aperti } V \subseteq U \text{ in } X.
 \end{cases}$$

ESEMPIO 1.3. Sia Y un altro spazio topologico. Il prefascio \mathcal{C}^Y delle funzioni continue a valori in Y su X è definito da:

$$\begin{cases}
 \mathcal{C}^Y(U) = \{f : U \rightarrow Y \text{ continue}\} & \text{per } U \text{ aperto di } X \\
 \varrho_V^U : \mathcal{C}^Y(U) \rightarrow \mathcal{C}^Y(V) & \text{per aperti } U \supseteq V \text{ in } X.
 \end{cases}$$

(da qui il nome "restrizione" per i morfismi ϱ_V^U).

Se inoltre Y ha la struttura di un gruppo abeliano, anche $\mathcal{C}^Y(U)$ ne possiede una, dotandolo dell'operazione $(f + g)(x) := f(x) \cdot g(x)$, dove \cdot è l'operazione in Y . In questo caso \mathcal{C}^Y è un prefascio di gruppi abeliani.

ESEMPIO 1.4. Sia X un aperto di \mathbb{R}^n . Sia $r \in \mathbb{N}(= \{0, 1, 2, \dots\})$. Il prefascio \mathcal{C}_X^r delle funzioni r -volte differenziabili a valori in \mathbb{R} su X è dato da

$$\mathcal{C}_X^r(U) = \{g : U \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ è } r\text{-volte differenziabile}\}$$

per ogni aperto U di X . Le applicazioni restrizioni sono quelle dell'esempio 1.3.

ESEMPIO 1.5. Sia X una varietà complessa. Il prefascio \mathcal{O}_X (o semplicemente \mathcal{O} , o anche \mathcal{C}^ω) delle funzioni olomorfe su X a valori in \mathbb{C} è dato da

$$\mathcal{O}_X(U) = \{g : U \rightarrow \mathbb{C} \mid g \text{ è olomorfa}\}$$

per ogni aperto U di X .

1.1. I limiti diretti.

DEFINIZIONE 1.6. Un insieme diretto Λ è un insieme dotato di una relazione di preordine \leq , che soddisfa anche:

a: $\forall \alpha, \beta \in \Lambda \exists \gamma \in \Lambda$ tale che $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$.

Spesso indichiamo $\Lambda_1 = \{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda; \alpha \leq \beta\}$.

Un sistema diretto di insiemi indicizzati da un insieme diretto Λ è una famiglia $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ di insiemi dotata, per ogni $(\alpha, \beta) \in \Lambda_1$, di un'applicazione di insiemi $\varrho_{\alpha, \beta} : U_\alpha \rightarrow U_\beta$, che soddisfa

b: $\forall \alpha \in \Lambda \varrho_{\alpha\alpha} = id_{U_\alpha}$

c: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ tali che $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, si ha $\varrho_{\alpha\gamma} = \varrho_{\beta\gamma} \circ \varrho_{\alpha\beta}$.

ESEMPIO 1.7. Dato uno spazio topologico X , l'insieme \mathcal{T} dei suoi aperti è diretto dalla relazione $U \leq V \Leftrightarrow U \supseteq V$. Dato anche un prefascio \mathcal{F} su X , sia $\varrho_{UV} := \varrho_V^U$ l'applicazione restrizione se $U \leq V$. Allora gli $(\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{T}}$, insieme con le ϱ_{UV} formano un sistema diretto di insiemi.

DEFINIZIONE 1.8. Dato un sistema diretto nella notazione della definizione 1.6, un target per il sistema è un insieme V e una collezione di applicazioni $(\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow V)_{\alpha \in \Lambda}$ che soddisfano la condizione di compatibilità: $\forall \alpha \leq \beta$, si ha $\sigma_\alpha = \sigma_\beta \circ \varrho_{\alpha\beta}$.

Un limite diretto per il sistema è un target $(U, (\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow U)_{\alpha \in \Lambda})$ che soddisfa la proprietà universale:

per qualsiasi target V (con applicazioni σ_α come sopra)

$\exists!$ un'unica applicazione $f : U \rightarrow V$ tale che

(6) $\forall \alpha \in \Lambda$ si abbia $\sigma_\alpha = f \circ \tau_\alpha$.

PROPOSIZIONE 1.9. *Qualsiasi due limiti diretti per un sistema sono isomorfi tra loro in modo naturale (cioè esiste una bigezione tra essi compatibile con tutte le τ_α).*

DIMOSTRAZIONE. Siano essi $(U, (\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ e $(U', (\tau'_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$. Dato che U è limite diretto e U' è un target, otteniamo una $f : U \rightarrow U'$; dato che U' è universale, otteniamo una $g : U' \rightarrow U$ e

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad \begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow \tau_\alpha & \uparrow g \\ U_\alpha & \xrightarrow{\tau'_\alpha} & U' \\ & \searrow \tau_\alpha & \uparrow f \\ & & U \end{array} \quad \text{commuta.}$$

Ma il fatto che U sia contemporaneamente target e limite diretto, implica che $id_U : U \rightarrow U$ è l'unica applicazione che rende tutti i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow \tau_\alpha & \\ U_\alpha & & \\ & \searrow \tau_\alpha & \\ & & U \end{array}$$

commutativi. Quindi $g \circ f = id_U$, e similmente si dimostra che $f \circ g = id_{U'}$. \square

Grazie alla proposizione 1.9, c'è una giustificazione nel parlare de *il* limite diretto e nel denotarlo con

$$\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$$

.

TEOREMA 1.10. *Sia $(U, (\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow U)_{\alpha \in \Lambda})$ un target per il sistema $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, $(\varrho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in \Lambda_1}$, tale che:*

- i:** $\forall u \in U \exists \alpha \in \Lambda$ tale che $u \in Im(\tau_\alpha)$
- ii:** se $\alpha, \beta \in \Lambda$ e $u_\alpha \in U_\alpha$ e $u_\beta \in U_\beta$ allora $\tau_\alpha(u_\alpha) = \tau_\beta(u_\beta) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Lambda$ tale che $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$ e $\varrho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) = \varrho_{\beta\gamma}(u_\beta)$.

Allora U è un limite diretto del sistema.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $(V, (\sigma_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ sia un altro target. Se $f : U \rightarrow V$ è tale da soddisfare la condizione (6) allora f deve essere ottenuta come segue:

$$(7) \quad \begin{cases} \text{per } u \in U, \text{ si prende } \alpha \in \Lambda \text{ tale che } u \in Im(\tau_\alpha), \\ \text{diciamo } u = \tau_\alpha(u_\alpha); \\ \text{allora } f(u) = \sigma_\alpha(u_\alpha). \end{cases}$$

Quindi, se f esiste, è unica.

Se scegliamo $\beta \in \Lambda$ tale che si abbia anche $u \in Im(\tau_\beta)$, diciamo $u = \tau_\beta(u_\beta)$, allora per la condizione (ii) $\exists \gamma \in \Lambda$ con $\varrho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) = \varrho_{\beta\gamma}(u_\beta)$; quindi

$$\sigma_\alpha(u_\alpha) = \sigma_\gamma(\varrho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)) = \sigma_\gamma(\varrho_{\beta\gamma}(u_\beta)) = \sigma_\beta(u_\beta).$$

Così f è ben definita per la (7), e così U soddisfa la condizione (6). \square

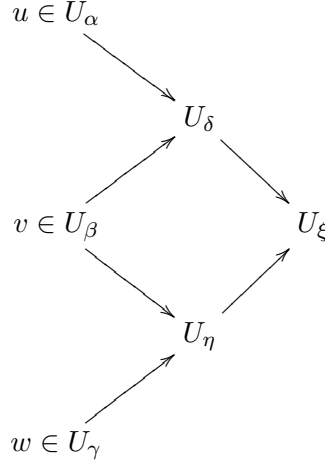
1.1.1. Costruzione di un limite diretto. Dato un sistema diretto $((U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\varrho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in \Lambda_1})$ di insiemi, possiamo ora costruire un limite diretto. Sia

$$W = \sqcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$$

l'unione disgiunta di tutti gli insiemi U_α . Su W definiamo la relazione \sim come segue:

$$u \sim v \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } u \in U_\alpha \text{ e } v \in U_\beta, \text{ allora} \\ \exists \gamma \text{ con } \alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma \text{ e} \\ \text{tale che } \varrho_{\alpha\gamma}(u) = \varrho_{\beta\gamma}(v). \end{cases}$$

Allora \sim è una relazione d'equivalenza (chiaramente riflessiva e simmetrica; per la transitività, se $u \sim v$ e $v \sim w$ allora abbiamo



e possiamo prendere ξ tale che $\delta \leq \xi$, $\eta \leq \xi$ per avere $u \sim w$).

Sia $U = W/\sim$ e siano $\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow U$ le applicazioni composite $U_\alpha \hookrightarrow W \rightarrow W/\sim$.

Vale dunque il seguente:

TEOREMA 1.11. $(U, (\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ è un limite diretto per il sistema $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Quindi ogni sistema diretto ammette un limite diretto.

DIMOSTRAZIONE. $(U, (\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ soddisfa le condizioni del teorema 1.10. \square

DEFINIZIONE 1.12. Un sistema diretto di gruppi abeliani è un sistema diretto di insiemi $(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, $(\varrho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in \Lambda_1}$ tale che ciascun G_α ha una struttura di gruppo abeliano, e tutti gli $\varrho_{\alpha\beta}$ sono omomorfismi rispetto a queste strutture.

ESEMPIO 1.13. Come nell'esempio 1.7 eccetto che si considera un prefascio di gruppi abeliani.

DEFINIZIONE 1.14. Un target per un sistema diretto di gruppi abeliani è un target $(G, (\sigma_\alpha : G_\alpha \rightarrow G)_{\alpha \in \Lambda})$ per il sistema diretto di insiemi sottostante, dove G ha una struttura di gruppo abeliano tale che tutte le σ_α sono omomorfismi di gruppi abeliani.

Un limite diretto è definito come nel caso generale degli insiemi, con l'aggiunta di richiedere che tutte le applicazioni coinvolte sono omomorfismi di gruppi abeliani.

Osserviamo che si possono definire gli stessi concetti relativi ad una qualsiasi struttura per avere, così, limiti diretti di anelli, gruppi, spazi topologici, moduli, ecc.

TEOREMA 1.15. Sia $((G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\varrho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in \Lambda_1})$ un sistema diretto di gruppi abeliani, e sia $(G, (\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ un target che soddisfa

i: $\forall g \in G \exists \alpha \in \Lambda$ tale che $g \in \text{Im}(\tau_\alpha)$

ii: $\forall \alpha$, per $g_\alpha \in G_\alpha$ abbiamo

$$\tau_\alpha(g_\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists \beta \text{ tale che } \alpha \leq \beta \text{ e } \varrho_{\alpha\beta}(g_\alpha) = 0.$$

Allora G è un limite diretto per il sistema.

Come abbiamo visto nel caso generale, occupiamoci ora del caso particolare seguente:

1.1.2. Costruzione di un limite diretto nel caso abeliano. Dato un sistema diretto $((G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\varrho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in \Lambda_1})$ di gruppi abeliani, sia $H = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ la somma diretta dei G_α , con le $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ iniezioni naturali.

Ricordiamo che H è il sottogruppo di $\prod_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ generato dalle immagini di tutte le i_α , dove

$$(i_\alpha(g_\alpha))_\beta = \begin{cases} g_\alpha & \text{se } \beta = \alpha \\ 0 & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

per $g_\alpha \in G_\alpha$.

Sia H_1 il sottogruppo di H generato da tutti gli elementi

$$i_\alpha(g_\alpha) - i_\beta(\varrho_{\alpha\beta}(g_\alpha))$$

dove (α, β) varia in Λ_1 e, di conseguenza, g_α varia in G_α . Sia $G = H/H_1$ e siano $\tau_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ le applicazioni naturali.

Similmente a quanto visto precedentemente vale il seguente:

TEOREMA 1.16. $(G, (\tau_\alpha : G_\alpha \rightarrow G)_{\alpha \in \Lambda})$ è un limite diretto per il sistema. Quindi qualsiasi sistema diretto di gruppi abeliani ammette un limite diretto.

DIMOSTRAZIONE. Le dimostrazioni dei teoremi 1.15, 1.16 sono simili rispettivamente a quelle dei teoremi 1.10 e 1.11. \square

1.2. Spighe di prefasci. Sia \mathcal{F} un prefascio (di insiemi o gruppi abeliani) sopra uno spazio topologico X . Fissiamo un punto $x \in X$. Gli $\mathcal{F}(U)$, al variare di U in tutti gli aperti tali che $U \ni x$, formano un sistema diretto con applicazioni

$$\varrho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) \text{ dove } U \supseteq V (\ni x).$$

DEFINIZIONE 1.17. La *spiga* \mathcal{F}_x di \mathcal{F} in x è $\lim_{\overrightarrow{U \ni x}} \mathcal{F}(U)$. Essa viene dotata di applicazioni

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x : s \mapsto s_x$$

per ogni aperto $U \ni x$. Gli elementi di \mathcal{F}_x sono qualche volta chiamati *germi* (di sezioni di \mathcal{F}).

I teoremi 1.10 e 1.15, tenendo conto della proposizione 1.9, ci dà:

PROPOSIZIONE 1.18. **a:** Ogni germe $t \in \mathcal{F}_x$ "provviene" da una qualche sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ per qualche intorno aperto U di x ; ossia $t = s_x$.

b: Due germi $s_x, t_x \in \mathcal{F}_x$ (tenendo conto della (a), diciamo $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$) verificano

$$s_x = t_x \Leftrightarrow \exists \text{ un aperto } W \subseteq U \cap V \text{ tale che } \varrho_W^U(s) = \varrho_W^V(t).$$

ESEMPIO 1.19. Per un prefascio costante \mathcal{A}_X sopra X abbiamo $\mathcal{A}_{X,x} = A$ per ogni $x \in X$.

ESEMPIO 1.20. Per un prefascio di funzioni quali \mathcal{C}^Y , \mathcal{C}^r o \mathcal{C}^ω , ogni germe in $x \in X$ si estende ad una funzione in qualche intorno aperto di x , e due germi sono uguali se e solo se funzioni corrispondenti coincidono in qualche intorno di x . Quindi un germe fornisce il comportamento locale di una funzione in un punto.

1.3. Morfismi di Prefasci.

DEFINIZIONE 1.21. Dati due prefasci \mathcal{F} , \mathcal{G} di insiemi su X , un *morfismo* $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è una collezione di applicazioni $f(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, al variare di U negli aperti di X , tale che, per aperti $U \supseteq V$ in X , il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \varrho_V^U \downarrow & & \downarrow \varrho_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

commuti, cioè $\varrho_V^U f(U) = f(V) \varrho_V^U$.

Se \mathcal{F} , \mathcal{G} sono prefasci di gruppi abeliani, nella definizione si richiede che ogni $f(U)$ è un omomorfismo di gruppi abeliani.

ESEMPIO 1.22. Sia M una varietà complessa. Su di essa consideriamo i prefasci di gruppi abeliani (con operazione +) \mathcal{O}_M e \mathcal{C}_M^0 (quest'ultimo il fascio delle funzioni continue su M). Allora l'inclusione $\mathcal{O}_M \hookrightarrow \mathcal{C}_M^0$ è un morfismo di prefasci abeliani.

ESEMPIO 1.23. Data una varietà complessa M , consideriamo il prefascio di gruppi abeliani \mathcal{O}_M^* , definito da $\mathcal{O}_M^*(U) = \{f \in \mathcal{O}_M(U) \mid f(z) \neq 0 \ \forall z\}$, in cui l'operazione è la moltiplicazione \cdot . Allora l'applicazione $\ell: \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M^*$ data, su ogni aperto U , da $\ell(U)(f) = e^{2\pi i f}$, è un morfismo di prefasci abeliani.

La composizione di morfismi è definita in maniera prevedibile: $(g \circ f)(U) = g(U) \circ f(U)$ se $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$. Un morfismo $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è chiamato un *isomorfismo* di prefasci (di insiemi o di gruppi abeliani) se e solo se esiste un morfismo $g: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tale che $f \circ g = id_{\mathcal{G}}$ e $g \circ f = id_{\mathcal{F}}$ (dove $id_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ è definita come $id_{\mathcal{F}}(U) = id_{\mathcal{F}(U)}$ per ogni aperto U in X).

PROPOSIZIONE 1.24. $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$

è un isomorfismo di prefasci (di insiemi o di gruppi abeliani)

$$\Leftrightarrow \forall \text{ aperto } U \text{ di } X \ f(U) \text{ è un isomorfismo}$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ aperto } U \text{ di } X \ f(U) \text{ è bigettiva.}$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} f \text{ isomorfismo} &\Leftrightarrow \exists g \text{ tale che } f \circ g = id_{\mathcal{G}} \text{ e } g \circ f = id_{\mathcal{F}} \\ &\Leftrightarrow \exists g \text{ tale che } \forall U \text{ si ha } f(U) \circ g(U) = id_{\mathcal{G}(U)} \text{ e} \\ &\quad g(U) \circ f(U) = id_{\mathcal{F}(U)} \\ &\Leftrightarrow \forall U \ f(U) \text{ è un isomorfismo.} \end{aligned}$$

E' facile verificare che se $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo con tutti gli $f(U)$ isomorfismi, gli inversi $f(U)^{-1}: \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ soddisfano le condizioni di compatibilità con la restrizione. \square

Dato un morfismo di prefasci $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ su X , a ciascun punto $x \in X$ corrisponde un morfismo di spighe

$$f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$

in modo tale che per ogni composizione $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$, abbiamo

$$(g \circ f)_x = g_x \circ f_x.$$

Dato $x \in X$ definiamo f_x come segue: qualsiasi $e \in \mathcal{F}_x$ è della forma $e = s_x$ per qualche aperto $U \ni x$ e qualche $s \in \mathcal{F}(U)$ (per la prop. 1.18); poniamo $f_x(e) = (f(U)(s))_x$ (cioè prendiamo il germe dell'immagine di s). Se si ha $e = s_x = t_x$ con $t \in \mathcal{F}(V)$, allora per la prop. 1.18 $\exists W \subseteq U \cap V$ con $x \in W$ e $\varrho_W^U(s) = \varrho_W^V(t)$; quindi abbiamo

$$\varrho_W^U(f(U)(s)) = f(W)\varrho_W^U(s) = f(W)\varrho_W^V(t) = \varrho_W^V(f(V)(t))$$

così che $(f(U)(s))_x = (f(V)(t))_x$ e dunque f_x è ben definita. È facile verificare anche la funtorialità, ossia $(g \circ f)_x = g_x \circ f_x$; è ovvia anche l'identità $(id_{\mathcal{F}})_x = id_{\mathcal{F}_x}$.

2. Fasci e Spazi Étale

DEFINIZIONE 2.1. Un prefascio \mathcal{F} di insiemi sopra uno spazio topologico X si dice *fascio* se soddisfa le seguenti proprietà:

M: Sia U un aperto qualsiasi di X e $U = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$ un ricoprimento aperto di U (quindi ogni U_{λ} è aperto in X); se $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ sono due sezioni di \mathcal{F} tali che

$$\forall \lambda \in \Lambda \ \varrho_{U_{\lambda}}^U(s) = \varrho_{U_{\lambda}}^U(s'),$$

allora $s = s'$.

I prefasci che soddisfano la proprietà (M) sono chiamati *monoprefasci*.

G: Sia U un aperto qualsiasi di X e $U = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ un ricoprimento aperto di U ; sia data una famiglia di sezioni $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ di \mathcal{F} con $s_\lambda \in \mathcal{F}(U_\lambda) \forall \lambda \in \Lambda$ tale che

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda \varrho_{U_\lambda \cap U_\mu}^{U_\lambda}(s_\lambda) = \varrho_{U_\lambda \cap U_\mu}^{U_\mu}(s_\mu);$$

allora \exists (e, per la (M), è unica) una $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che

$$\forall \lambda \in \Lambda \varrho_{U_\lambda}^U(s) = s_\lambda.$$

La condizione (G) è anche detta di *incollamento*.

Un *fascio abeliano* è un prefascio di gruppi abeliani che soddisfa le condizioni (M) e (G).

Notiamo che per un prefascio di gruppi abeliani, possiamo semplificare la (M) ponendo $s' = 0$. Inoltre, si verifica che se \mathcal{F} è un fascio abeliano, allora $\mathcal{F}(\emptyset)$ è il gruppo banale.

PROPOSIZIONE 2.2. *Se \mathcal{F} è un prefascio e \mathcal{G} un monoprefascio sopra X , e $f, g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sono due morfismi che coincidono su tutte le spighe, allora $f = g$.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda ad esempio [19]. □

Un *morfismo di fasci* è semplicemente un morfismo di prefasci tra due fasci.

Osserviamo che se $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un isomorfismo di prefasci, e \mathcal{G} è un fascio, allora anche \mathcal{F} è un fascio.

Inoltre, i fasci sono caratterizzati dalla seguente proprietà: dato un fascio \mathcal{F} su uno spazio topologico X , per qualsiasi aperto U , due sezioni $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ sono uguali se e solo se i loro germi coincidono ovunque in U .

ESEMPIO 2.3. Tutti gli esempi di prefasci di funzioni $\mathcal{C}^Y, \mathcal{C}^r, \mathcal{O}$ sono fasci, e tutti per la stessa ragione: affinché un'applicazione arbitraria a valori in $Y, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ soddisfi la condizione appropriata (continuità, differenziabilità, analiticità) è necessario e sufficiente che la condizione sia soddisfatta in qualche piccolo intorno di ogni punto: così una funzione "incollata" soddisferà ancora la condizione.

2.1. Spazi Étale.

DEFINIZIONE 2.4. Sia X uno spazio topologico. Uno *spazio étale* sopra X è una coppia (E, p) formata da uno spazio topologico E e un'applicazione continua $p : E \rightarrow X$ tale che p è un *omeomorfismo locale*, cioè: $\forall y \in E \exists$ un aperto $N \ni y$, un aperto $U \ni p(y)$ tale che $p|_N : N \rightarrow U$ è un omeomorfismo.

Un *morfismo* di spazi étale $f : (E, p) \rightarrow (E', p')$ è un'applicazione continua $f : E \rightarrow E'$ tale che $p = p' \circ f$.

2.1.1. Il funtore Γ .

Ad ogni spazio étale E possiamo associare un fascio di insiemi ΓE (il *fascio delle sezioni di E* in modo tale che un morfismo $f : E \rightarrow E'$ di spazi étale dà luogo ad un morfismo $\Gamma f : \Gamma E \rightarrow \Gamma E'$ di fasci.

Innanzitutto, ponendo $\Gamma(U, E) := \{\text{applicazioni continue } \sigma : U \rightarrow E; p \circ \sigma = id_U\}$ al variare di U tra gli aperti di X , $\Gamma E : U \mapsto \Gamma(U, E)$ è un fascio.

Inoltre, dato un morfismo $f : E \rightarrow E'$ di spazi étale, otteniamo il morfismo Γf di fasci già accennato, considerando, \forall aperto U di X :

$$\begin{aligned} \Gamma(U, E) &\rightarrow \Gamma(U, E') \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma. \end{aligned}$$

Infine, per concludere che $\Gamma : \mathbf{Spazi\ étalé\ su\ X} \rightarrow \mathbf{Fasci\ su\ X}$ (cioè Γ inteso come funtore tra la categoria degli spazi étale su X e quella dei fasci su X) è un funtore covariante, è facile verificare le proprietà funtoriali $\Gamma(f \circ g) = \Gamma f \circ \Gamma g, \Gamma(id) = id$.

Vale il seguente

LEMMA 2.5. *Sia (E, p) uno spazio étalé su X . Allora*

a: *p è aperta*

b: *se U è un aperto di X e $\sigma \in \Gamma(U, E)$, allora $\sigma(U)$ è aperto in E ; inoltre insiemi di questa forma danno una base per la topologia di E .*

c: *se*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & X \end{array}$$

è un diagramma commutativo di applicazioni, e p, p' sono omeomorfismi locali, allora

$$\phi \text{ continua} \Leftrightarrow \phi \text{ aperta} \Leftrightarrow \phi \text{ omeomorfismo locale.}$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda ad esempio B. R. Tennison, *Sheaf Theory*, Cambridge University Press 1975, pag. 19. \square

2.1.2. *Il funtore L .* Ad ogni prefascio \mathcal{F} su X possiamo associare uno spazio étalé $L\mathcal{F}$ in modo tale che un qualsiasi morfismo $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ di prefasci dà luogo ad un morfismo $Lf : L\mathcal{F} \rightarrow L\mathcal{F}'$ di spazi étalé.

Sia $L\mathcal{F} = \sqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ (l'unione disgiunta delle spighe di \mathcal{F}) con $p : L\mathcal{F} \rightarrow X$ la proiezione naturale, in modo che $p^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$. Introduciamo in $L\mathcal{F}$ una topologia come segue: sia U un aperto in X e $s \in \mathcal{F}(U)$; allora possiamo definire una applicazione

$$\hat{s} : U \rightarrow L\mathcal{F} : x \mapsto s_x \in \mathcal{F}_x.$$

Tutti gli insiemi $\hat{s}(U) = \{s_x \in L\mathcal{F}; x \in U\}$ siano aperti. Allora verifichiamo che gli $\{\hat{s}(U); s \in \mathcal{F}(U)\}$ formano una base per la topologia che essa genera: sia $e \in \hat{s}(U) \cap \hat{t}(V)$, dove $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$; allora

- \Rightarrow i germi di s, t coincidono in $p(e) := x$
- \Rightarrow s, t coincidono in un intorno W di x (con $W \subseteq U \cap V$)
- \Rightarrow e ha un intorno della base $\hat{s}(W) = \hat{t}(W)$ dentro $\hat{s}(U) \cap \hat{t}(V)$

dove per $\hat{s}(W)$ intendiamo $\widehat{\varrho_W^U(s)}(W)$.

Inoltre p è continua rispetto a questa topologia su $L\mathcal{F}$, dato che per ogni aperto U di X si ha

$$p^{-1}(U) = \cup \{\hat{s}(V); s \in \mathcal{F}(V) \text{ con } V \subseteq U \text{ aperto}\},$$

e p è un omeomorfismo locale dato che su $\hat{s}(U)$ essa l'inversa continua \hat{s} .

Abbiamo già visto che un morfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ ci dà una collezione di applicazioni tra spighe $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}'_x$ e quindi un'applicazione $Lf : L\mathcal{F} \rightarrow L\mathcal{F}'$ tale che $p = p' \circ Lf$; infine risulta $Lf(\widehat{\hat{s}(U)}) = \widehat{f(U)}(s)(U)$ e, alla luce del punto (c) del lemma 2.5, Lf è anche continua.

Verificando le proprietà $L(f \circ g) = Lf \circ Lg$, $L(id) = id$, si può infine concludere $L : \mathbf{Prefasci \ su \ X} \rightarrow \mathbf{Spazi \ étalé \ su \ X}$ è un funtore covariante tra la categoria dei prefasci su X e quella degli spazi étalé su X .

2.2. Fascificazione di un prefascio. Dallo studio dei due funtori prima studiati, è evidente che ad ogni prefascio \mathcal{F} su X si può associare un fascio $\Gamma L\mathcal{F}$, detto la *fascificazione* di \mathcal{F} . Abbiamo un morfismo di prefasci $n_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \Gamma L\mathcal{F}$ definito come segue: dato un aperto U in X e $s \in \mathcal{F}(U)$, s definisce la funzione

$$\hat{s} : U \rightarrow L\mathcal{F} : x \mapsto s_x \in \mathcal{F}_x.$$

Quindi $\hat{s} \in \Gamma(U, L\mathcal{F})$; allora $n_{\mathcal{F}}(U) : s \mapsto \hat{s}$.

LEMMA 2.6. \mathcal{G} è un fascio $\Leftrightarrow \mathcal{G} \rightarrow \Gamma L\mathcal{G}$ è un isomorfismo di fasci.

DIMOSTRAZIONE. Si veda ad esempio [19, pag. 23]. □

OSSERVAZIONE 2.7. Dato un morfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{n_{\mathcal{F}}} & \Gamma L\mathcal{F} \\ f \downarrow & & \downarrow \Gamma Lf \\ \mathcal{F}' & \xrightarrow{n_{\mathcal{F}'}} & \Gamma L\mathcal{F}' \end{array}$$

commuta. Si dice che $n_{\mathcal{F}}$ è *naturale*.

LEMMA 2.8. Per qualsiasi prefascio \mathcal{F} su X , tutte le applicazioni

$$\mathcal{F}_x \rightarrow (\Gamma L\mathcal{F})_x$$

indotte sulle spighe grazie ad $n_{\mathcal{F}}$ sono isomorfismi.

DIMOSTRAZIONE. Si veda ad esempio [19, pag. 24]. □

Vale la seguente *proprietà universale*:

TEOREMA 2.9. Sia \mathcal{F} un prefascio e \mathcal{G} un fascio sopra X . Per ogni morfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ esiste un unico morfismo di fasci $g : \Gamma L\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tale che

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\ & \searrow n_{\mathcal{F}} & \nearrow g \\ & \Gamma L\mathcal{F} & \end{array}$$

commuti.

DIMOSTRAZIONE. **Esistenza:** Se esistesse una $g : \Gamma L\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tale che $f = g \circ n_{\mathcal{F}}$, allora le sue applicazioni g_x (per $x \in X$) sulle spighe sono determinate come composizioni

$$(\Gamma L\mathcal{F})_x \xleftarrow{n_{\mathcal{F},x}^{-1}} \mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x,$$

(dove $n_{\mathcal{F},x}^{-1}$ esiste per il lemma 2.8). Quindi g è univocamente determinata.

Unicità: Partendo dal morfismo $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, abbiamo già visto come costruire il morfismo $L\mathcal{F} \xrightarrow{Lf} L\mathcal{G}$ ed il morfismo $\Gamma L\mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma Lf} \Gamma L\mathcal{G}$, per ottenere il morfismo

$$\Gamma L\mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma Lf} \Gamma L\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}.$$

Usando l'osservazione 2.7, è facile verificare che il triangolo di applicazioni che ne risulta commuta. □

ESEMPIO 2.10. Sia \mathcal{A}_X il prefascio costante su X . Non è difficile vedere che le sezioni del fascio $\Gamma L\mathcal{A}_X$ sono, sopra un aperto U in X , isomorfe all'insieme delle funzioni localmente costanti $s : U \rightarrow A$.

Notiamo che se U è disconnesso (e A ha più di un elemento) si ha $\Gamma L\mathcal{A}_X(U) \neq A$; cioè significa che per il lemma 2.6 \mathcal{A}_X non è un fascio.

2.2.1. Divisori di Weil e di Cartier.

DEFINIZIONE 2.11. Un sottoinsieme analitico A di una varietà M si dice *irriducibile* se non può venire rappresentato come una unione finita di due sottoinsiemi analitici distinti da A stesso. L'insieme A si dice *localmente irriducibile* in un punto $a \in A$ se esiste un sistema fondamentale di intorno \mathcal{U} di a in M tale che per ogni $U \in \mathcal{U}$, $A \cap U$ è irriducibile. Se per ogni $a \in A$, si ha che A è irriducibile in A , allora A si dice *localmente irriducibile*.

Nel seguito, parlando dell'ordine di una funzione lungo una ipersuperficie, avremo bisogno della seguente:

OSSERVAZIONE 2.12. Una ipersuperficie analitica A è localmente irriducibile in ogni suo punto regolare.

Sia infatti $a \in \text{reg}A$; allora esiste un intorno coordinato U di A tale che $A \cap U = \{z_n = \varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)\}$. Allora si vede subito che il teorema di divisione di Weierstrass garantisce l'irriducibilità in a della funzione $z_n - \varphi$. Una tale funzione di definizione vicino ai punti regolari è detta *funzione di definizione minimale*. Essa ha la proprietà di dividere ogni funzione olomorfa in a che si annulla su A . E' possibile trovare una funzione, sempre detta minimale, con la proprietà di divisibilità appena esposta anche nei punti singolari: se $p \in \text{sng}A$ e \tilde{f} definisce A vicino a p , allora fattorizzando il germe \tilde{f}_p in $\mathcal{O}_{M,p}$, si otterrà un'espressione del tipo

$$\tilde{f}_p = f_1^{k_1} f_2^{k_2} \cdots f_r^{k_r}$$

con gli f_j irriducibili. Basta allora prendere $f = f_1 f_2 \cdots f_r$.

DEFINIZIONE 2.13. Un *divisore* D su M è una combinazione lineare formale localmente finita a coefficienti in \mathbb{Z}

$$D = \sum a_i A_i$$

di ipersuperfici analitiche irriducibili.

Nella definizione, "localmente finita" sta a significare che ogni $p \in M$ possiede un intorno U tale che $U \cap A_i \neq \emptyset$ solo per un numero finito di indici i . Ovviamente, se M è compatta, la locale finitezza implica che tale somma sia finita.

Denoteremo l'insieme dei divisori su una varietà M con $\text{Div}(M)$. Un divisore $D = \sum a_i A_i$ si dice *effettivo* se $a_i \geq 0$ per ogni i ; scriveremo $D \geq 0$ se D è effettivo e $D > 0$ se $D \geq 0$ e $D \neq 0$. Scriveremo inoltre $D_1 \geq D_2$ se $D_1 - D_2 \geq 0$ e similmente per $>$. Si noti che \geq dota l'insieme $\text{Div}(M)$ di un ordinamento parziale e che ogni divisore $D \in \text{Div}(M)$ si può scrivere nella forma

$$D = Z - P$$

con $Z, P \geq 0$ e Z e P hanno supporti disgiunti, dove il supporto di un divisore $\Delta = \sum_i d_i A_i$ è $\text{Supp}\Delta = \bigcup_i A_i$.

È chiaro che $\text{Div}(M)$ è un gruppo abeliano additivo, chiamato il *gruppo dei divisori di Weil*, il cui elemento neutro è dato dal divisore identicamente nullo e in cui l'inverso del divisore D è dato da $-D$.

Sia ora $g \in \mathcal{O}(M)$, A una ipersuperficie analitica irriducibile in M e $a \in \text{reg}(A)$. Si consideri il germe $g_a \in \mathcal{O}_{M,a}$ di g in a e sia f una funzione di definizione per A vicino ad a irriducibile in $\mathcal{O}_{M,a}$. Indicheremo con $\text{ord}_{A,a}g$ il più grande $\alpha \in \mathbb{N}$ tale che

$$g_a = f_a^\alpha h_a$$

in $\mathcal{O}_{M,a}$. Si osservi che se $g(a) \neq 0$ allora $\text{ord}_{A,a}g = 0$.

L'applicazione $\text{reg}A \rightarrow \mathbb{N}$ che associa ad ogni $g \in \mathcal{O}(M)$ il suo ordine $\text{ord}_{A,x}g$ lungo A in $x \in \text{reg}A$ è continua. Infatti se $\text{ord}_{A,a}g = \alpha$, allora $g_a = f_a^\alpha h_a$ e i germi f_a^α e h_a sono relativamente primi in $\mathcal{O}_{M,a}$. Ma allora $f_x^\alpha, h_x \in \mathcal{O}_{M,x}$ sono relativamente primi per ogni x in un intorno sufficientemente piccolo di a , cioè $g_x = f_x^\alpha h_x$ e $\text{ord}_{A,x}g = \alpha$. Poiché A è irriducibile in M , allora -essendo \mathbb{N} discreto- $\text{reg}A$ è connesso e $\text{ord}_{A,x}g$ è costante.

DEFINIZIONE 2.14. Sia A una ipersuperficie irriducibile di M e $g \in \mathcal{O}(M)$. Si definisce l'*ordine* $\text{ord}_A g$ di g lungo A come l'ordine $\text{ord}_{A,p}g$ di g in un (qualunque) punto $p \in \text{reg}A$.

È bene osservare che se A è localmente irriducibile in $a \in \text{sing}(A)$ ($=A \text{ reg}A$), ha senso considerare $\text{ord}_{A,a}g$ e che tale numero coincide con ord_{Ag} .

La nozione di ordine di una funzione olomorfa globale, ci permette di associare ad ogni $0 \neq f \in \mathcal{O}(M)$ un divisore $(f) \in \text{Div}(M)$ nel seguente modo: dette A_j le componenti irriducibili in M di $f^{-1}(0)$ poniamo

$$(f) = \sum_j \text{ord}_{A_j} f A_j.$$

Se $f, g \in \mathcal{O}(M)$ e A è irriducibile in M allora segue immediatamente dalla definizione di ordine che

$$\text{ord}_A fg = \text{ord}_A f + \text{ord}_A g,$$

e quindi che $(fg) = (f) + (g)$.

Si noti, infine, che è lecito dare la nozione di ordine $\text{ord}_A\{f_\alpha\}$ lungo una ipersuperficie irriducibile A anche di una collezione di funzioni $\{f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)\}$, per qualche ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M , a patto che sia soddisfatta la condizione seguente: se $a \in \text{reg}A \cap U_\alpha \cap U_\beta$ allora $\text{ord}_{A,a}f_\alpha = \text{ord}_{A,a}f_\beta$, condizione che sarà sempre verificata nel caso delle funzioni meromorfe, come vedremo più in dettaglio qui di seguito.

DEFINIZIONE 2.15. Sia M una varietà complessa. Sia $\widehat{\mathcal{M}}$ il prefascio definito, sugli aperti U di M , come $\widehat{\mathcal{M}}(U) = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{O}(U)$, dove

$$\mathcal{S}(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f \neq 0 \text{ su ogni componente connessa di } U\}$$

è una parte moltiplicativa in $\mathcal{O}(U)$. Allora abbiamo $\widehat{\mathcal{M}}(U) = \{\frac{f}{g} \mid f \in \mathcal{O}(U), g \in \mathcal{S}(U)\}$.

Sia $\mathcal{M} := \Gamma L\widehat{\mathcal{M}}$ il fascio delle funzioni meromorfe su M .

Sia $f \in \mathcal{M}(M)$. Allora esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e funzioni olomorfe g_α, h_α in U_α relativamente prime tra loro tali che $f|_{U_\alpha} = g_\alpha/h_\alpha$ e $g_\alpha h_\beta = g_\beta h_\alpha$ in $U_\alpha \cap U_\beta$. Sia $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ e φ_p un germe irriducibile in p di una funzione olomorfa φ . Supponiamo che φ^k divida g_α ma φ^{k+1} non divida g_α in p per qualche $k \in \mathbb{N}$. In $\mathcal{O}_{M,p}$ si ha

$$\varphi^k \psi h_\beta = g_\beta h_\alpha$$

dove $\varphi^k \psi = g_\alpha$, con φ^k e ψ relativamente primi. Ma allora φ^k divide il secondo membro, ma non divide h_α (g_α e h_α sono prime tra loro), cioè φ^k divide g_β . Se g_β/φ^k fosse divisibile per φ allora h_β sarebbe divisibile per φ , contro l'ipotesi di relativa primalità di g_β e h_β . Ragionando analogamente sulle h_α si ottiene che data una ipersuperficie irriducibile A e una funzione meromorfa globale f data localmente come g_α/h_α sono ben definiti $\text{ord}_A\{g_\alpha\}$ e $\text{ord}_A\{h_\alpha\}$. Si definisce allora il divisore (f) di una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(M)$ al modo seguente: dette Z_j e P_k le componenti irriducibili delle due ipersuperfici analitiche date rispettivamente da $\{g_\alpha = 0\}$ e $\{h_\alpha = 0\}$ si ponga

$$(f) = \sum_{j,k} \text{ord}_{Z_j}\{g_\alpha\}Z_j - \text{ord}_{P_k}\{h_\alpha\}P_k.$$

Si suole porre anche

$$(f)_0 = \sum_i \text{ord}_{Z_i}\{g_\alpha\}Z_i, \quad (f)_\infty = \sum_j \text{ord}_{P_j}\{h_\alpha\}P_j;$$

con queste notazioni $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ e $(f)_0$ viene detto *divisori degli zeri* di f e $(f)_\infty$ *divisore dei poli* di f .

Vogliamo ora descrivere $\text{Div}(M)$ usando il linguaggio dei fasci. Sia \mathcal{M}^* il fascio su M definito come $\mathcal{M}^*(U) = \{\varphi \in \mathcal{M}(U) \mid \varphi \text{ invertibile}\}$. Sia H il prefascio su M definito come $H(U) = \mathcal{M}^*(U)/\mathcal{O}^*(U)$. Sia $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* := \Gamma LH$.

Possiamo definire il *gruppo moltiplicativo dei divisori di Cartier* come $\text{C}adiv(M) = \check{H}^0(M, \frac{\mathcal{M}^*}{\mathcal{O}^*}) (= \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*(M))$.

Vediamo come è fatta una sezione globale f di $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*(M)$. Essa sarà data da un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e da funzioni $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ tali che $f_\beta/f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Possiamo supporre che in ogni U_α , f_α sia rapporto di due funzioni oloedre relativamente prime g_α/h_α . La condizione $f_\beta/f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ permette di ricalcare il ragionamento siffatto per quanto riguarda l'ordine lungo una ipersuperficie irriducibile A di una famiglia di una famiglia di funzioni oloedre (in questo caso $g_\alpha h_\beta = g_\beta h_\alpha \psi$, essendo ψ un'unità in $\mathcal{O}_{M,x}$, per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$); in definitiva sono ben definiti $ord_A\{g_\alpha\}$ e $ord_A\{h_\alpha\}$. Possiamo associare allora ad f il divisore

$$(f) = \sum_{j,k} ord_{Z_j}\{g_\alpha\}Z_j - ord_{P_k}\{h_\alpha\}P_k$$

dove le Z_j e le P_k sono le componenti irriducibili delle ipersuperfici $Z = \{g_\alpha = 0\}$ e $P = \{h_\alpha = 0\}$.

Viceversa, sia $D = \sum_i a_i A_i \in Div(M)$. Asseriamo che esiste $f \in Cadiv(M)$ tale che $(f) = D$.

Sia $\{U_p\}$ il ricoprimento aperto di M così ottenuto: per ogni p in M esiste un intorno U di p tale che U interseca solo un numero finito di ipersuperfici irriducibili del supporto di D . Siano esse A_1, A_2, \dots, A_N . Se $p \in A_j$ si scelga $g_{j,p} \in \mathcal{O}_{M,p}$ minimale di definizione: essa sarà il germe di una funzione $g_j \in \mathcal{O}(U_j)$. Si ponga $U_p = U \cap \bigcap_j U_j$ $g_j|_{U_p} = g_j|_{U_p}$. Si consideri ora la collezione di funzioni meromorfe

$$f_{U_p} = \prod_{U_p \cap A_i \neq \emptyset} g_i^{a_i}|_{U_p} \in \mathcal{M}^*(U_p).$$

La minimalità delle funzioni $g_i|_{U_p}$ assicura e che $f = \{f_{U_p}\}$ sia in $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, e che (f) abbia esattamente gli stessi coefficienti di D nella sua espressione sotto forma di somma.

Otteniamo così una corrispondenza tra $Cadiv(M)$ e $Div(M)$ che, è facile verificare, si tratta in realtà di un isomorfismo. Per questo motivo spesso il fascio $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ si chiama *fascio dei divisori*.

3. Successioni esatte di morfismi di prefasci e fasci

3.1. Kernels e monomorfismi.

DEFINIZIONE 3.1. Dato un morfismo di prefasci su X $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, per ogni aperto $U \subset X$ definiamo

$$\mathcal{K}(U) = \ker f(U) = \{s \in \mathcal{F}(U); f(U)(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}\},$$

il quale costituisce un sottogruppo di $\mathcal{F}(U)$. Se $U \supseteq V$ sono aperti in X e $s \in \mathcal{K}(U)$, allora $f(V)\varrho_V^U(s) = \varrho_V^U(f(U)(s)) = 0$, così che $\varrho_V^U(s) \in \mathcal{K}(V)$. Quindi i $\mathcal{K}(U)$, con le $\varrho_V^U|_{\mathcal{K}(U)}$ formano un prefascio sopra X , chiamato il *kernel* di f , e denotato con $Ker(f)$. Notiamo che abbiamo un naturale morfismo di prefasci $ker(f) \rightarrow \mathcal{F}$, e la composizione

$$Ker(f) \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \text{ è zero.}$$

Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 3.2. Se $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di prefasci, allora $Ker(f)$ ha la proprietà universale:

- se \mathcal{H} è un prefascio, e $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ è un morfismo di prefasci tale che $\mathcal{H} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ sia il morfismo zero, allora g si fattorizza in modo unico come

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{g} & \mathcal{F} \\ & \searrow & \nearrow \\ & Ker(f) & \end{array}$$

in cui il morfismo $\mathcal{H} \rightarrow \text{Ker}(f)$ esiste ed è l'unico che fa commutare il diagramma.

PROPOSIZIONE 3.3. Sia \mathcal{F} un fascio, \mathcal{G} un monoprefascio, e $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci.

Allora $\text{Ker}(f)$ è un fascio. Quindi se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono fasci, lo è anche $\text{Ker}(f)$.

DIMOSTRAZIONE. La condizione di monoprefascio è verificata banalmente. Per la condizione di incollamento, se $U = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ e $s_\lambda \in \text{Ker}(f)(U_\lambda)$ soddisfano la condizione di compatibilità su tutte le intersezioni $U_\lambda \cap U_\mu$, allora $\exists s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varrho_{U_\lambda}^U(s) = s_\lambda \forall \lambda$ poiché \mathcal{F} è un fascio. Allora $s' = f(U)(s) \in \mathcal{G}(U)$ è tale che $\varrho_{U_\lambda}^U(s') = 0 \forall \lambda$, e dunque $s' = 0$ dato che \mathcal{G} è un monoprefascio. Quindi $s \in \text{Ker}(f)(U)$, come richiesto. \square

TEOREMA 3.4. Per un morfismo $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ di prefasci, le seguenti tre condizioni sono equivalenti:

- i:** $\text{Ker}(f) = 0$
- ii:** \forall aperto U in X $f(U)$ è suriettiva
- iii:** f è un monomorfismo, cioè se \mathcal{H} è un prefascio qualsiasi e $\mathcal{H} \xrightarrow{g, h} \mathcal{F}$ tali che $f \circ g = f \circ h$ allora $g = h$.

Queste implicano la condizione:

- iv:** $\forall x \in X$ f_x è iniettiva

la quale, inoltre, è una condizione equivalente se \mathcal{F} è un monoprefascio.

DIMOSTRAZIONE. **i:** \Leftrightarrow (ii) è immediato.

ii: \Leftrightarrow (iii) Dato $\text{Ker}(f) = 0$ e \mathcal{H}, g, h come nella (iii), vediamo che $(g - h) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ soddisfa $\mathcal{H} \xrightarrow{g-h} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ con $f \circ (g - h) = 0$, così per la prop.3.2 $(g - h)$ si fattorizza come

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{g-h} & \mathcal{F} \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 & \end{array}$$

e così $(g - h) = 0$, cioè $g = h$.

iii: \Rightarrow (i) Se f è un monomorfismo, dimostriamo che $0 \rightarrow \mathcal{F}$ ha la proprietà universale di $\text{Ker}(f)$ enunciata nella prop.3.2: infatti, se $\mathcal{H} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ è tale che $f \circ g = 0$, allora $\mathcal{H} \xrightarrow{g, 0} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ dà lo stesso risultato, così per la (iii) si ha $g = 0$, cioè g si fattorizza (in modo unico) come $\mathcal{H} \xrightarrow{g} \mathcal{F}$. Quindi il fascio 0 ha la

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{g} & \mathcal{F} \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 & \end{array}$$

proprietà universale di $\text{Ker}(f)$ ed una facile argomentazione mostra che $\text{Ker}(f)$ è un fascio zero.

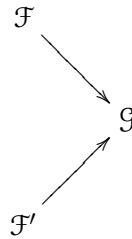
ii: \Rightarrow (iv) (\mathcal{F} qualsiasi prefascio) Sia $t \in \mathcal{F}_x$ tale che $f_x(t) = 0$; allora \exists un aperto U e $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che s ha germe t in x , così che $f(U)(s)$ ha germe 0 in x ; quindi \exists un aperto $V \subseteq U$ con

$$0 = \varrho_V^U(f(U)(s)) = f(V)(\varrho_V^U(s)).$$

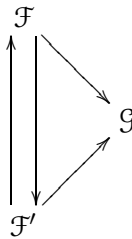
Ma $f(V)$ è iniettiva per ipotesi, e quindi $\varrho_V^U(s) = 0$, e così $t = 0$.

iv: \Rightarrow (ii) (supponendo \mathcal{F} monoprefascio) Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $f(U)(s) = 0 \in \mathcal{G}(U)$; allora $\forall x \in U$ $f_x(s_x) = (f(U)(s))_x = 0$, così $\forall x \in U$ $s_x = 0$ dato che ogni f_x è iniettiva per ipotesi. Dato che \mathcal{F} è un monoprefascio, allora $s = 0$. \square

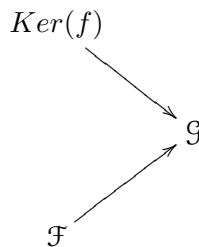
DEFINIZIONE 3.5. Se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono prefasci (risp. fasci) su X e $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un monomorfismo, diciamo che \mathcal{F} è (o più precisamente rappresenta) un *sottoprefascio* (risp. *sottofascio*) di \mathcal{G} (tramite f). Due monomorfismi



sono detti definire lo *stesso* sotto(pre)fascio di \mathcal{G} se e solo se \exists un isomorfismo $\mathcal{F} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}'$ di (pre)fasci tale che il diagramma



commuta. Se $\mathcal{G} \xrightarrow{f} \mathcal{H}$ è un morfismo, e



rappresenta lo stesso sottoprefascio di \mathcal{G} in questo senso, allora vediamo facilmente che $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ha la proprietà universale di un kernel enunciata nella prop.3.2, e diciamo che $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un *kernel* di $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$.

COROLLARIO 3.6. *Un monoprefascio è un sottoprefascio di un fascio (in particolare della sua fascificazione); viceversa, un sottoprefascio di un fascio è sempre un monoprefascio.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda il lemma 2.8 e la condizione (iii) \Leftrightarrow (iv) del teorema 3.4; il viceversa è ottenuto direttamente dalla (ii) del teorema 3.4, e dalla definizione di prefascio. \square

COROLLARIO 3.7. *Se $f : E \rightarrow E'$ è un morfismo di spazi étalé sopra X , allora $\Gamma f : \Gamma E \rightarrow \Gamma E'$ è un monomorfismo di fasci $\Leftrightarrow f$ è iniettiva $\Leftrightarrow f$ è un omeomorfismo di E in un sottospazio aperto di E' .*

DIMOSTRAZIONE. Si veda ad esempio B. R. Tennison, *Sheaf Theory*, Cambridge University Press 1975. \square

PROPOSIZIONE 3.8. *Se $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di prefasci, allora*

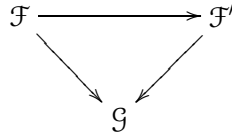
$$(\text{Ker } f)_x = \text{Ker } f_x$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned}
 t \in (Ker f)_x &\Leftrightarrow \exists \text{ un aperto } U \ni x \text{ e } s \in Ker(f)(U) \text{ tale che } t = s_x \\
 &\Leftrightarrow \exists \text{ un aperto } U \ni x \text{ e } s \in \mathcal{F}(U) \text{ tale che } t = s_x \text{ e } f(U)(s) = 0 \\
 &\Leftrightarrow f_x(t) = 0.
 \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 3.9. Se $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sono sottoprefasci di \mathcal{G} , scriviamo $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}'$ se e solo se \exists un morfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ (necessariamente mono) tale che



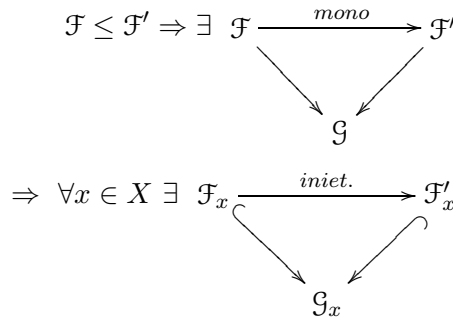
commuta. Quindi $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}' \leq \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sono lo stesso sottoprefascio.

PROPOSIZIONE 3.10. Se $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sono sottoprefasci di un fascio \mathcal{G} , allora

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{F}' \Leftrightarrow \forall x \in X \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}'_x$$

(come sottogruppi di \mathcal{G}_x per la (iv) del teorema 3.4).

DIMOSTRAZIONE. (\Rightarrow):



cioè $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}'_x$.

(\Leftarrow): Supponiamo che $\forall x \in X \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}'_x$. Dato $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ con U aperto in X , esiste un'unica sezione di \mathcal{F}' con germe s_x in ciascun $x \in U$; quindi esiste un morfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ tale che i morfismi $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ e $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ coincidono su tutte le spighe. Per la prop.2.2 essi sono uguali e così $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}'$.

□

COROLLARIO 3.11. Per due sottoprefasci $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ di un fascio \mathcal{G} abbiamo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \Leftrightarrow \forall x \in X \mathcal{F}_x = \mathcal{F}'_x.$$

DIMOSTRAZIONE. Si applica due volte la prop.3.10.

□

3.2. Cokernels e epimorfismi.

DEFINIZIONE 3.12. Dato $f \in Hom(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ per $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Ob(Presh/X)$ poniamo

$$\mathcal{C}(U) = \mathcal{G}(U)/f(U)[\mathcal{F}(U)] = \mathcal{G}(U)/Imf(U) \text{ (per } U \text{ aperto in } X)$$

($Imf(U)$ è un sottogruppo abeliano di $\mathcal{G}(U)$ e dunque si prende il gruppo quoziente). Se $U \supseteq V$ sono aperti in X , il morfismo $\varrho_V^U : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)/Imf(V)$ annulla $Imf(U)$: infatti se $s \in \mathcal{F}(U)$ allora

$$\varrho_V^U(f(U)(s)) = f(V)\varrho_V^U(s) \in Imf(V).$$

Quindi otteniamo un morfismo indotto $\overline{\varrho}_V^U : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ e \mathcal{C} diventa un prefascio, chiamato il *prefascio cokernel* di f e denotato con $PCok(f)$. Abbiamo un naturale morfismo di prefasci: $\mathcal{G} \rightarrow PCok(f)$ e la composizione $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow PCok(f)$ è il morfismo nullo.

E' di facile dimostrazione la seguente:

PROPOSIZIONE 3.13. *Se $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, allora $PCok(f)$ ha la proprietà universale:
: se \mathcal{H} è un prefascio e $g \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ è tale che $g \circ f = 0$, allora g si fattorizza in modo unico come*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{g} & \mathcal{H} \\ & \searrow & \nearrow \\ & PCok(f) & \end{array}$$

in cui il morfismo $PCok(f) \rightarrow \mathcal{H}$ della figura è l'unico che fa commutare il diagramma.

OSSERVAZIONE 3.14. Vedremo in seguito come il prefascio $PCok(f)$ di un morfismo $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ di fasci non è necessariamente un fascio.

DEFINIZIONE 3.15. Se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono fasci su X e $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, allora il *fascio cokernel* $SCok(f)$ di f è la fascificazione $\Gamma LPCok(f)$ del prefascio cokernel. Così $SCok(f)$ è un fascio, e abbiamo un morfismo naturale $\mathcal{G} \rightarrow SCok(f)$ (dato da $\mathcal{G} \rightarrow PCok(f) \rightarrow SCok(f)$) tale che la composizione $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow SCok(f)$ è il morfismo nullo.

PROPOSIZIONE 3.16. *Se $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, dove \mathcal{F}, \mathcal{G} sono fasci, allora $SCok(f)$ ha la proprietà universale:*

: se \mathcal{H} è un fascio e $g \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tale che $g \circ f = 0$, allora g si fattorizza in modo unico come

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{g} & \mathcal{H} \\ & \searrow & \nearrow \\ & SCok(f) & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Otteniamo un'unica fattorizzazione di g con morfismi di prefasci prima grazie a $PCok(f)$ tramite la prop.3.13, e poi grazie a $SCok(f)$ tramite il teorema2.9 poiché \mathcal{H} è un fascio. \square

Ora tratteremo due teoremi importanti per capire come la suriettività di morfismi di prefasci e fasci lavora in modo differente dall'iniettività.

TEOREMA 3.17. *Siano \mathcal{F}, \mathcal{G} prefasci e $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Allora le seguenti tre condizioni sono equivalenti:*

- i:** $PCok(f) = 0$
- ii:** \forall aperto U in X $f(U)$ è suriettiva
- iii:** f è un epimorfismo nella categoria dei prefasci, cioè -per definizione- se \mathcal{H} è un qualsiasi prefascio e i morfismi $\mathcal{G} \xrightarrow{g,h} \mathcal{H}$ sono tali che $g \circ f = h \circ f$, allora $h = g$.

DIMOSTRAZIONE. **(i) \Leftrightarrow (ii):** è immediata.

(i) \Leftrightarrow (iii): è facile (si applica la prop.3.13 a $(g - h)$, in modo simile per il punto (iii) del teo.3.4

\square

TEOREMA 3.18. *Sia $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Allora le seguenti quattro condizioni sono equivalenti:*

- i:** $SCok(f) = 0$
- ii:** $\forall x \in X$ $(PCok(f))_x = 0$
- iii:** $\forall x \in X$ f_x è suriettiva

iv: f è un epimorfismo nella categoria dei fasci, cioè -per definizione- se \mathcal{H} è un qualsiasi fascio e i morfismi $\mathcal{G} \xrightarrow{g,h} \mathcal{H}$ sono tali che $g \circ f = h \circ f$, allora $g = h$. Inoltre qualsiasi condizione del teo.3.17 implica tutte quelle di questo teorema.

DIMOSTRAZIONE. : (i) \Leftrightarrow (iv) è facile (si applica la prop.3.16 a $(g - h)$).

: (i) \Leftrightarrow (ii)

$SCok(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X (SCok(f))_x = 0$ dato che $SCok(f)$ è un fascio

(si applica la prop.2.2 ai morfismi $SCok(f) \xrightarrow{id,0} SCok(f)$)

$\Leftrightarrow \forall x \in X (PCok(f))_x = 0$ per il lemma2.8.

: (ii) \Leftrightarrow (iii)

$PCok(f)_x = 0 \Leftrightarrow \forall$ aperto $U \ni x$ e $s \in PCok(f)(U)$

\exists un aperto V con $U \supseteq V \ni x$ e $\varrho_V^U(s) = 0$

$\Leftrightarrow \forall$ aperto $U \ni x$ e $s \in \mathcal{G}(U)$

\exists un aperto V con $U \supseteq V \ni x$ e $\varrho_V^U(s) \in Im f(V)$

$\Leftrightarrow f_x$ è suriettiva.

Inoltre si ha chiaramente 3.17(iii) \Rightarrow 3.18(iv) (altrimenti possiamo considerare 3.17(i) \Rightarrow 3.18(ii)). \square

Ora faremo vedere degli esempi per mostrare che i teoremi 3.17 e 3.18 non sono equivalenti.

OSSERVAZIONE 3.19. Sia $X = [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ e sia \mathcal{F} il fascio costante con spighe \mathbb{Z} (con spazio étalé $X \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_1} X$). Sia \mathcal{G} il fascio le cui spighe sono

$$\mathcal{G}_x = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } x = 0 \text{ o } 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

così che, per esempio, $\Gamma(X, \mathcal{G}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Sia $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ l'unico morfismo tale che $f_x = id_{\mathbb{Z}}$ se $x = 0$ o 1 . Allora, per la 3.18(iii), f è chiaramente un epimorfismo di fasci; ma

$$\Gamma(X, f) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

non può essere suriettiva, così che per la 3.17(ii) f non è un epimorfismo di prefasci.

OSSERVAZIONE 3.20. Sia $X = \mathbb{C}$ e sia \mathcal{O} il fascio abeliano delle funzioni analitiche su \mathbb{C} a valori in \mathbb{C} . Sia $d : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ il morfismo di derivazione:

$$d(U) : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U) : f \mapsto \frac{df}{dz} \text{ per } U \text{ aperto in } \mathbb{C}.$$

Per qualsiasi $x \in \mathbb{C}$, una funzione analitica su un piccolo dischetto intorno di x può essere integrata ed espressa come $\frac{df}{dz}$ con f analitica; quindi d è un epimorfismo di fasci (3.18(iii)). Ma se prendiamo U non semplicemente connesso, ci sono funzioni analitiche su U che non possono essere espresse come $d(U)$ di una funzione analitica (per esempio $\frac{1}{z}$ su $z \neq 0$); quindi tali $d(U)$ non sono suriettive e d non è un epimorfismo di prefasci.

TEOREMA 3.21. Dato un morfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, abbiamo le seguenti condizioni equivalenti:

- : (i) f è un isomorfismo;
- : (ii) \forall aperto U di X $f(U)$ è bigettiva;
- : (iii) f è un monomorfismo e un epimorfismo di prefasci.

Se f è un morfismo di fasci, abbiamo le ulteriori condizioni equivalenti:

- : (iv) f è un monomorfismo e un epimorfismo di fasci;
- : (v) $\forall x \in X$ f_x è bigettiva.

DIMOSTRAZIONE. : (i) \Leftrightarrow (ii) è la prop.1.24.

: (ii) \Leftrightarrow (iii) è chiaro dai teoremi 3.4 e 3.17.

Ora supponiamo che \mathcal{F} e \mathcal{G} siano fasci.

: (iv) \Leftrightarrow (v) è la 3.4(iv) e 3.18(iii).

: (iii) \Rightarrow (iv) è 3.17 \Rightarrow 3.18.

: (v) \Rightarrow (i): se la (v) è vera, allora —per la costruzione di uno spazio étalé— il morfismo di spazi étalé $Lf : L\mathcal{F} \rightarrow L\mathcal{G}$ è bigettivo, ed è un omeomorfismo locale per il 2.5(c); quindi è un isomorfismo di spazi étalé, e così in

$$\begin{array}{ccc} \Gamma L\mathcal{F} & \xrightarrow{\Gamma Lf} & \Gamma L\mathcal{G} \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \end{array}$$

(il quale commuta per l'osservazione 2.7) ΓLf è un isomorfismo. Quindi lo è anche f per il lemma 2.6. □

PROPOSIZIONE 3.22. Sia $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci. Allora

$$\forall x \in X \quad (PCok f)_x = Cok f_x (= \mathcal{G}_x / Im f_x).$$

Se f è un morfismo di fasci, allora si ha inoltre

$$\forall x \in X \quad (SCok f)_x = Cok f_x.$$

DIMOSTRAZIONE. Per $t \in \mathcal{G}_x$ abbiamo

$$\begin{aligned} t \mapsto 0 \in (PCok(f))_x &\Leftrightarrow \exists \text{ un aperto } U \ni x \text{ e } s \in \mathcal{G}(U) \text{ tale che} \\ &\quad s_x = t \text{ e } s \mapsto 0 \in PCok(f)(U) \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ un aperto } U \ni x \text{ e } s \in \mathcal{G}(U) \text{ tale che} \\ &\quad s_x = t \text{ e } s \in Im f(U) \\ &\Leftrightarrow t \in Im(f_x). \end{aligned}$$

Nel caso dei fasci, abbiamo un diagramma commutativo

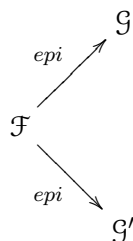
$$\begin{array}{ccc} & PCok(f) & \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{G} & & SCok(f) \\ & \searrow & \end{array}$$

che induce un diagramma sulle spighe

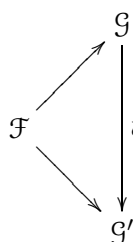
$$\begin{array}{ccc} & (PCok f)_x & \\ & \nearrow & \downarrow \wr \\ \mathcal{G}_x & & (SCok f)_x \\ & \searrow & \end{array}$$

in cui la freccia verticale è un isomorfismo per il lemma 2.8. □

DEFINIZIONE 3.23. "Dualmente" alla 3.5, se $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un epimorfismo di prefasci, diciamo che \mathcal{G} è un *prefascio quoziente* di \mathcal{F} . Se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono fasci ed f è un epimorfismo di fasci, diciamo che \mathcal{G} è un *fascio quoziente* di \mathcal{F} . In entrambi i casi



definiscono lo *stesso* oggetto quoziente di \mathcal{F} se e solo se esiste un isomorfismo $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'$ tale che



commuta. Infine, come nella 3.5, possiamo definire le nozioni di prefascio cokernel e fascio cokernel.

TEOREMA 3.24. : (i) Ogni sottoprefascio è un kernel di qualche morfismo di prefasci.

: (ii) Ogni sottofascio è un kernel di qualche morfismo di fasci.

: (iii) Ogni prefascio quoziente è un (prefascio) cokernel di qualche morfismo di prefasci.

: (iv) Ogni fascio quoziente è un fascio cokernel di qualche morfismo di fasci.

In altri termini, entrambe le categorie dei prefasci e dei fasci soddisfano:

: (a) ogni monomorfismo è un kernel,

: (b) ogni epimorfismo è un cokernel.

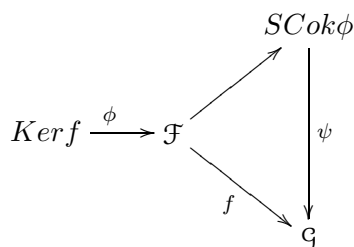
DIMOSTRAZIONE. : (i) Dato un monomorfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, vogliamo dimostrare che $\mathcal{F} = \text{Ker}(\mathcal{G} \rightarrow \text{PCok}(f))$. Ma $\mathcal{G} \rightarrow \text{PCok}(f)$ manda a zero esattamente quelle sezioni $s \in \mathcal{G}(U)$ che provengono tramite f da sezioni di $\mathcal{F}(U)$.

: (ii) Dato un monomorfismo di fasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, abbiamo $\mathcal{F} \leq \text{Ker}(\mathcal{G} \rightarrow \text{SCok}(f))$ (come sottooggetti di \mathcal{G}); grazie alla proprietà universale del Ker (prop.3.2), dato che $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{SCok}(f)$ è il morfismo nullo, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ si fattorizza attraverso il kernel. Ma per $x \in X$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x &= \text{Ker}(\mathcal{G}_x \rightarrow (\text{SCok}(f))_x) \text{ per la 3.22} \\ &= (\text{Ker}(\mathcal{G} \rightarrow \text{SCok}(f)))_x \text{ per la 3.8} \end{aligned}$$

e dunque $\mathcal{F} = \text{Ker}(\mathcal{G} \rightarrow \text{SCok}(f))$ per la 3.10.

: (iii) Dato un epimorfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, vogliamo dimostrare che $\mathcal{G} = \text{PCok}(\text{Ker}(f) \rightarrow \mathcal{F})$, come i prefasci quozienti di \mathcal{F} . Grazie alla prop.3.13 otteniamo



- e ψ è un epimorfismo di prefasci dato che lo è f , e si può vedere facilmente anche che ψ è un monomorfismo; quindi ψ è un isomorfismo per il teorema 3.21.
- : (iv) Dato un epimorfismo di fasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, dimostriamo che $\mathcal{G} = SCok(Ker f \rightarrow \mathcal{F})$ come fasci quozienti di \mathcal{F} ; per la prop.3.16 abbiamo

$$\begin{array}{ccc}
 & & SCok\phi \\
 & \nearrow & \downarrow \psi \\
 Ker f \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F} & \\
 & \searrow f & \downarrow \\
 & & \mathcal{G}
 \end{array}$$

e $\forall x \in X$ ψ_x è suriettiva dato che -per la 3.18- lo è f_x , e $\forall x \in X$ ψ_x è anche iniettiva per la 3.22. Quindi per il teo.3.21 ψ è un isomorfismo di fasci. \square

3.3. Successioni esatte di morfismi di prefasci e fasci.

- DEFINIZIONE 3.25. : (i) Se $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di prefasci, definiamo il *prefascio immagine* di f come $PIm(f) = Ker(\mathcal{G} \rightarrow PCokf)$.
- : (ii) Se $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, definiamo il *fascio immagine* di f come $SIm(f) = Ker(\mathcal{G} \rightarrow SCokf)$.

DEFINIZIONE 3.26. Sia $\dots \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow \dots$ una successione di morfismi di prefasci sopra uno spazio X . Diciamo che la successione è *esatta* in \mathcal{G} come successione di prefasci se e solo se

$$PIm(f) = Ker(g) \quad (\text{uguali sottoprefasci di } \mathcal{G});$$

e che è una *successione esatta di morfismi di prefasci* se e solo se è esatta in ogni punto nel quale questa condizione ha senso.

Se la successione consiste di fasci, diciamo che è *esatta* in \mathcal{G} come successione di fasci se e solo se

$$SIm(f) = Ker(g) \quad (\text{uguali sottofasci di } \mathcal{G});$$

e si definisce analogamente una *successione esatta di morfismi di fasci*.

- TEOREMA 3.27. : (i) $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ è una *successione esatta di morfismi di prefasci* se e solo se \forall aperto U in X $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ è una *successione esatta di morfismi di gruppi abeliani*.
- : (ii) $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ è una *successione esatta di morfismi di fasci* se e solo se $\forall x \in X$ $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ è una *successione esatta di morfismi di gruppi abeliani*.
- : (iii) Se $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ è una *successione di morfismi di fasci* che è *esatta* come *successione di prefasci*, allora è una *successione esatta di morfismi di fasci*.

DIMOSTRAZIONE. : (i)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \text{ è esatta} &\Leftrightarrow Kerg = PImf \\
 &\Leftrightarrow \forall \text{ aperto } U \quad Kerg(U) = Ker(\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)/Imf(U)) \\
 &\quad = Imf(U) \\
 &\Leftrightarrow \forall \text{ aperto } U \quad \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U) \text{ è esatta.}
 \end{aligned}$$

: (ii) $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ è esatta $\Leftrightarrow \forall x \in X (Kerg)_x = (SImf)_x$ per il 3.11. Ma

$$\begin{aligned} (SImf)_x &= (Ker(G \rightarrow SCok(f)))_x \text{ per definizione} \\ &= Ker(\mathcal{G}_x \rightarrow (SCokf)_x) \text{ per la 3.8} \\ &= Ker(\mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G}_x/Imf_x) \text{ per la 3.22} \\ &= Imf_x. \end{aligned}$$

Quindi si ha il risultato.

: (iii) Abbiamo $Kerg = PImf$; quindi $\forall x \in X$ si ha

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}Kerg)_x &= (PImf)_x = Ker(\mathcal{G}_x \rightarrow (PCokf)_x) = Ker(\mathcal{G}_x \rightarrow (SCokf)_x) \text{ per la 3.22} \\ &= (SImf)_x, \end{aligned}$$

e quindi -per il 3.11- si ha $Kerg = SImf$. □

Infine vale il seguente:

COROLLARIO 3.28. *In ognuna delle categorie dei fasci e dei prefasci, vale:*

: (a) $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ è esatta $\Leftrightarrow f$ è un monomorfismo.

: (b) $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow 0$ è esatta $\Leftrightarrow f$ è un epimorfismo.

: (c) Per qualsiasi morfismo $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ si ha

$$0 \rightarrow Kerf \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow Cok(f) \rightarrow 0$$

è esatta, dove al posto di $Cok(f)$ possiamo considerare sia $PCok(f)$ sia $SCok(f)$, se f è un morfismo rispettivamente di prefasci e di fasci.

: (d) $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ è esatta $\Leftrightarrow f$ è un kernel di g .

: (e) $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ è esatta $\Leftrightarrow g$ è un cokernel di f .

DIMOSTRAZIONE. Direttamente dal teorema 3.27, usando il teorema 3.4, i teo.3.17 e 3.18, le prop.3.8 e 3.22. □

DEFINIZIONE 3.29. Un funtore covariante \mathcal{T} tra due categorie in ciascuna delle quali è definito il concetto di esattezza (per esempio due categorie abeliane) è chiamato *esatto* (risp. *esatto a sinistra*, *esatto a destra*) se e solo se ogniqualvolta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

è una successione esatta, anche la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{H} \rightarrow 0$$

(risp. $0 \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{H}$, $\mathcal{T}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{H} \rightarrow 0$) è esatta.

TEOREMA 3.30. : (i) Il funtore di inclusione **Fasci** \rightarrow **Prefasci** è esatto a sinistra.

: (ii) Il funtore di fascificazione $\Gamma L : \mathbf{Prefasci} \rightarrow \mathbf{Fasci}$ è esatto.

: (iii) Per ogni aperto U in X il funtore "sezioni sopra U "

$$-(U) : \mathbf{Prefasci} \rightarrow \mathbf{Gruppi\ abeliani} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$$

è esatto.

: (iv) Per ogni aperto U in X il funtore "sezioni sopra U "

$$\Gamma(U, -) : \mathbf{Fasci} \rightarrow \mathbf{Gruppi\ abeliani} : \Gamma(U, \mathcal{F})$$

è esatto a sinistra.

DIMOSTRAZIONE. : (i) Se $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ è esatta nella categoria dei fasci, allora f è un kernel di g , e così $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ è esatta nella categoria dei prefasci (tutto per il cor.3.28).

- : (ii) Una successione esatta $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ di prefasci sopra X dà, per ogni $x \in X$, una successione esatta di spighe $0 \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x \rightarrow 0$ (grazie al 3.4 e alla 3.22, tenendo presente il 3.28(a) ed (e)). Grazie ai 2.7 e 2.8, c'è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \mathcal{G}_x & \longrightarrow & \mathcal{H}_x \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & (\Gamma L\mathcal{F})_x & \longrightarrow & (\Gamma L\mathcal{G})_x & \longrightarrow & (\Gamma L\mathcal{H})_x \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove le frecce verticali sono isomorfismi. Quindi anche la successione inferiore è esatta, e così $0 \rightarrow \Gamma L\mathcal{F} \rightarrow \Gamma L\mathcal{G} \rightarrow \Gamma L\mathcal{H} \rightarrow 0$ è una successione esatta di morfismi di fasci, per la 3.27(ii).

- : (iii) E' una riannunziatura del 3.27(i).
 : (iv) Se $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ è esatta, allora f è un kernel di g e così, per ogni aperto U , $\Gamma(U, f)$ è un kernel di $\Gamma(U, g)$; cioè la successione $0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{H})$ è esatta nella categoria dei gruppi abeliani. \square

OSSERVAZIONE 3.31. Continuando sulla dell'esempio 3.20, abbiamo una successione esatta di fasci sopra $X = \mathbb{C}$

$$(9) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d=\text{derivazione}} \mathcal{O} \rightarrow 0$$

dove \mathbb{C} denota il fascio costante su X . Così per qualsiasi aperto connesso U in X

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\Gamma(U, d)} \Gamma(U, \mathcal{O})$$

è una successione esatta di gruppi abeliani; ma l'ultimo morfismo a destra non è necessariamente suriettivo, come nell'esempio 3.20 (il che mostra che 9 non è una successione esatta di prefasci).

4. Elementi di Algebra Omologica

In questa sezione ricordiamo brevemente alcuni elementi di algebra omologica che verranno usati sistematicamente in seguito.

Sia R un anello commutativo unitario. Un modulo differenziale (K, d) è un R -modulo insieme con un endomorfismo $d: K \rightarrow K$, chiamato *differenziale*, tale che $d \circ d = 0$. Il modulo dei *cicli* e quello dei *bordi* di K sono definiti rispettivamente come

$$Z(K) = \ker(d), \quad B(K) = \text{Im}(d).$$

L'ipotesi che $d \circ d = 0$ implica $B(K) \subseteq Z(K)$; è lecito dunque definire il *gruppo di omologia* di K come il modulo quoziente

$$H(K) = Z(K)/B(K).$$

Un *morfismo di moduli differenziali* $\phi: (K, d) \rightarrow (L, d')$ è un R -omomorfismo tale che $d' \circ \phi = \phi \circ d$. È chiaro a questo punto che $\phi(Z(K)) \subseteq Z(L)$ e $\phi(B(K)) \subseteq B(L)$; dunque per ogni morfismo di moduli differenziali otteniamo un morfismo indotto sui gruppi di omologia, denotato con

$$H(\phi): H(K) \rightarrow H(L).$$

Si vede facilmente che H è un funtore covariante, cioè $H(\psi \circ \phi) = H(\psi) \circ H(\phi)$.

Diremo che due morfismi $\phi, \psi: K \rightarrow L$ sono *omotopi* se esiste una applicazione R -lineare $h: K \rightarrow L$ tale che

$$d' \circ h + h \circ d = \psi - \phi.$$

In questo caso h si dice essere un'*omotopia* tra ϕ e ψ ; se $z \in Z(K)$ è un cociclo di K allora $dz = 0$ e $\psi(z) - \phi(z) = d'h(z)$, dunque $\phi(z)$ e $\psi(z)$ individuano lo stesso elemento

di $H(L)$. In altre parole $H(\phi) = H(\psi)$. Il modulo K si dice essere omotopo a 0 se Id_K è omotopa a 0; in questo caso allora $H(K) = 0$.

LEMMA 4.1 (Del Serpente). *Sia*

$$(10) \quad 0 \rightarrow K \xrightarrow{\phi} L \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$$

una successione esatta corta di morfismi di moduli differenziali. Allora esiste un omomorfismo $\partial: H(M) \rightarrow H(K)$, detto omomorfismo di connessione, e una successione esatta di omologia

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} & H(K) & \\ \partial \nearrow & & \searrow H(\phi) \\ H(M) & \xleftarrow{H(\psi)} & H(L). \end{array}$$

Inoltre, ad ogni diagramma commutativo di successioni esatte corte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

è associato un diagramma commutativo di successioni esatte in omologia

$$\begin{array}{ccccccc} H(K) & \longrightarrow & H(L) & \longrightarrow & H(M) & \xrightarrow{\partial} & H(K) \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H(K') & \longrightarrow & H(L') & \longrightarrow & H(M') & \xrightarrow{\partial} & H(K') \longrightarrow \dots \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimosteremo soltanto l'esistenza dell'omomorfismo di connessione ∂ , a titolo di esempio, l'esattezza in $H(M)$ della successione (11), lasciando per esercizio le restanti verifiche. Denoteremo inoltre –con abuso di linguaggio– con d il differenziale di tutti e tre i moduli differenziali che appaiono in (10), sebbene essi siano a priori differenti.

Sia dunque $m \in Z(M)$ e $l \in L$ un qualunque elemento tale che $\psi(l) = m$. Poiché $\psi(dl) = d\psi(l) = dm = 0$, esiste un unico elemento $k \in K$ tale che $\phi(k) = dl$. Del resto $\phi(dk) = d\phi(k) = ddl = 0$, ed essendo ϕ iniettiva, $dk = 0$. Dunque k individua una classe di omologia $\{k\}$ in $H(K)$. L'applicazione ∂ resterà una volta mostrato che $\{k\}$ è indipendente dall'elemento $l \in L$ tale che $\psi(l) = m$ e dal rappresentate scelto per $\{m\} \in H(M)$; a questo scopo siano dunque $l, l' \in L$ tali che $\psi(l) = \psi(l') = m$ e $k, k' \in K$ gli unici elementi di K tali che $\phi(k) = dl$ e $\phi(k') = dl'$. Poiché $\psi(l - l') = 0$, esiste ed è unico $k_1 \in K$ tale che $\phi(k_1) = l - l'$; ma allora

$$\phi(k - k') = dl - dl' = d(l - l') = d\phi(k_1) = \phi(dk_1),$$

cioè $k - k' = dk_1$. Sia ora $m = m' + dm_1 \in M$, $\psi(l) = m$ e $\psi(l_1) = m_1$, per qualche $l, l_1 \in L$ (e naturalmente $\phi(k) = dl$ e $\phi(k') = dl'$ come sopra). Allora, posto $l' = l - dl_1$ si ha

$$\psi(l') = \psi(l - dl_1) = m - dm_1 = m';$$

del resto si ha $\psi(l - l' - dl_1) = 0$ e dunque esiste unico $k_1 \in K$ con $\phi(k_1) = l - l' - dl_1$; quindi $\phi(dk_1) = \phi(k) - \phi(k')$ che è quanto volevamo mostrare.

Per quanto riguarda l'esattezza in $H(M)$, dobbiamo mostrare che $\ker(\partial) = \text{Im } H(\psi)$. Se $\{m\}$ è nell'immagine di $H(\psi)$, allora $m = \psi(l)$ con $dl = 0$, dunque $\partial\{m\} = 0$. Viceversa, se $\partial\{m\} = \{k\} = 0$, con $k = dk_1$, allora $dl = \phi(k) = d\phi(k_1)$ e $\psi(l) = m$. Posto $z = l - \phi(k_1)$ si ha che $dz = dl - d\phi(k_1) = 0$ e $\psi(z) = \psi(l) - \psi(\phi(k_1)) = m$, cioè $m \in \text{Im } H(\psi)$. \square

Nella maggior parte delle applicazioni, i moduli differenziali si presentano dotati di una \mathbb{Z} -graduazione naturale. Un complesso omologico è un modulo differenziale graduato $K_\bullet = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} K_q$ insieme con un differenziale d di grado -1 , cioè $d = \bigoplus d_q$, con $d_q: K_q \rightarrow K_{q-1}$ e $d_{q-1} \circ d_q = 0$. Similmente, un complesso coomologico, è un modulo differenziale graduato $K^\bullet = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} K^q$ insieme con differenziali $d^q: K^q \rightarrow K^{q+1}$ tali che $d^{q+1} \circ d^q = 0$ (e in questo caso verranno sempre utilizzati apici piuttosto che pedici). I corrispondenti (co)cicli, (co)bordi e moduli di (co)omologia, ereditano in questo caso una \mathbb{Z} -graduazione naturale. Nel caso della coomologia, ad esempio, questi moduli verranno denotati con

$$Z^\bullet(K^\bullet) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} Z^q(K^\bullet), \quad B^\bullet(K^\bullet) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} B^q(K^\bullet), \quad H^\bullet(K^\bullet) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(K^\bullet).$$

Salvo diversamente specificato, i morfismi di complessi saranno assunti essere di grado 0, cioè della forma $\phi^\bullet = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \phi^q$, con $\phi^q: K^q \rightarrow L^q$. Ogni successione esatta corta

$$0 \rightarrow K^\bullet \xrightarrow{\phi^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{\psi^\bullet} M^\bullet \rightarrow 0$$

dà luogo alla corrispondente successione esatta lunga di gruppi di coomologia

$$\dots \rightarrow H^q(K^\bullet) \xrightarrow{H^q(\phi^\bullet)} H^q(L^\bullet) \xrightarrow{H^q(\psi^\bullet)} H^q(M^\bullet) \xrightarrow{\partial^q} H^{q+1}(K^\bullet) \rightarrow \dots$$

e, similmente nel caso dell'omologia (in questo caso l'omomorfismo di connessione sarà di grado -1).

Avendo a che fare con diagrammi commutativi di tali tipi di successioni, il seguente lemma è spesso utile; la sua dimostrazione è un semplice "diagram chasing".

LEMMA 4.2 (Dei Cinque). *Si consideri il diagramma commutativo di R -moduli*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

dove le righe sono successioni esatte. Se ϕ_2 e ϕ_4 sono iniettive e ϕ_1 è suriettiva, allora ϕ_3 è iniettiva. Se ϕ_2 e ϕ_4 sono suriettive e ϕ_5 è iniettiva, allora ϕ_3 è suriettiva. In particolare, ϕ_3 è isomorfismo non appena lo sono $\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5$.

5. Coomologia di Čech

Sia $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Per una questione di semplicità di notazione, indicheremo

$$U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q} = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}.$$

Il gruppo $\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ delle q -cocatene di Čech è l'insieme di famiglie

$$c = (c_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q}) \in \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in I^{q+1}} \mathcal{A}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q})$$

La struttura di gruppo su $\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ è quella ovvia dedotta dalla legge di addizione sulle sezioni di \mathcal{A} .

Il differenziale di Čech $\delta^q: \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ è definito dalla formula

$$(12) \quad (\delta^q c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \sum_{0 \leq j \leq q+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}},$$

e poniamo $\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$, $\delta^q = 0$ per $q < 0$. Nei gradi 0 e 1, otteniamo per esempio

$$(13) \quad q = 0, \quad c = (c_\alpha), \quad (\delta^0 c)_{\alpha\beta} = c_\beta - c_\alpha|_{U_{\alpha\beta}},$$

$$(14) \quad q = 1, \quad c = (c_{\alpha\beta}), \quad (\delta^1 c)_{\alpha\beta\gamma} = c_{\beta\gamma} - c_{\alpha\gamma} + c_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta\gamma}}.$$

È facile verificare che $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$.

Otteniamo così un complesso di cocatene $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A}), \delta)$, chiamato il *complesso di cocatene di Čech* relativo al ricoprimento \mathcal{U} .

DEFINIZIONE 5.1. Il gruppo di coomologia di Čech di \mathcal{A} relativo ad \mathcal{U} è

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) := H^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})).$$

La (13) mostra che l'insieme degli 0-cocicli di Čech è l'insieme delle famiglie $(c_\alpha) \in \prod \mathcal{A}(U_\alpha)$ tale che $c_\beta = c_\alpha$ su $U_\alpha \cap U_\beta$. Tale famiglia definisce in modo unico una sezione globale $f \in \mathcal{A}(X)$ con $f|_{U_\alpha} = c_\alpha$. Quindi

$$(15) \quad \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = \mathcal{A}(X).$$

Sia $\mathcal{V} = (V_\beta)_{\beta \in J}$ un altro ricoprimento aperto di X più fine di \mathcal{U} ; ciò significa che esiste un'applicazione $\varrho : J \rightarrow I$ tale che $V_\beta \subset U_{\varrho(\beta)}$ per ogni $\beta \in J$. Allora possiamo definire un morfismo $\varrho^\bullet : \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ come

$$(16) \quad (\varrho^q c)_{\beta_0 \dots \beta_q} = c_{\varrho(\beta_0) \dots \varrho(\beta_q)}|_{V_{\beta_0 \dots \beta_q}};$$

la proprietà di commutazione $\delta \varrho^\bullet = \varrho^\bullet \delta$ è immediata. Se $\varrho' : J \rightarrow I$ è un'altra applicazione di raffinamento tale che $V_\beta \subset U_{\varrho'(\beta)}$ per ogni β , i morfismi $\varrho^\bullet, \varrho'^\bullet$ sono omotopi. Per vedere ciò, definiamo un'applicazione $h^q : \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ come

$$(h^q c)_{\beta_0 \dots \beta_{q-1}} = \sum_{0 \leq j \leq q-1} (-1)^j c_{\varrho(\beta_0) \dots \varrho(\beta_j) \varrho'(\beta_j) \dots \varrho'(\beta_{q-1})}|_{V_{\beta_0 \dots \beta_{q-1}}}.$$

È facile da verificare l'identità omotopica $\delta \varrho'^\bullet - \delta \varrho^\bullet = h^{q+1} \circ \delta^q - \delta^q \circ h^q$. Quindi ϱ^\bullet e ϱ'^\bullet inducono un'applicazione che dipende solo da \mathcal{U}, \mathcal{V} :

$$(17) \quad H^q(\varrho^\bullet) = H^q(\varrho'^\bullet) : \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{A}).$$

Vogliamo definire un *limite diretto* $\check{H}^q(X, \mathcal{A})$ dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ per mezzo delle applicazioni (17) di raffinamento. Per evitare difficoltà legate alla teoria degli insiemi, i ricoprimenti usati in questa definizione saranno considerati come sottoinsiemi di $\mathcal{P}(X)$ (l'insieme delle parti di X), così che la collezione di tutti i ricoprimenti diviene un insieme.

DEFINIZIONE 5.2. Il gruppo di coomologia di Čech $\check{H}^q(X, \mathcal{A})$ è il limite diretto

$$\check{H}^q(X, \mathcal{A}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$$

al variare di \mathcal{U} nella collezione di tutti i ricoprimenti aperti di X . Esplicitamente, questo significa che gli elementi di $\check{H}^q(X, \mathcal{A})$ sono le classi di equivalenza nell'unione disgiunta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, dove un elemento in $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ è identificato con un altro di $\check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ se coincidono le loro immagini in $\check{H}^q(\mathcal{W}, \mathcal{A})$ per qualche raffinamento \mathcal{W} dei ricoprimenti \mathcal{U} e \mathcal{V} .

Se $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ è un morfismo di fasci, abbiamo un ovvio morfismo indotto $\varphi^\bullet : \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{B})$, e quindi troviamo un morfismo (infatti è facile verificare che $\varphi^\bullet \delta = \delta \varphi^\bullet$)

$$H^q(\varphi^\bullet) : \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{B}).$$

Sia $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ una successione di morfismi di fasci esatta. Abbiamo una successione di morfismi di gruppi esatta

$$(18) \quad 0 \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{B}) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{C}),$$

ma in generale l'ultima applicazione non è suriettiva, perché ogni sezione in $\mathcal{C}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$ non ha necessariamente un sollevamento in $\mathcal{B}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$. L'immagine di $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ in

$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ sarà denotato con $\check{C}_\mathcal{B}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ e chiamato il complesso delle *cocatene sollevabili* di \mathcal{C} in \mathcal{B} . Per costruzione, la successione

$$(19) \quad 0 \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{B}) \rightarrow \check{C}_\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \rightarrow 0$$

è esatta, e così otteniamo una corrispondente successione esatta lunga di coomologia

$$(20) \quad \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{B}) \rightarrow \check{H}_\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

PROPOSIZIONE 5.3. *Sia X uno spazio paracompatto. Se*

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

è una successione di morfismi di fasci esatta, c'è una successione esatta

$$\check{H}^q(X, \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}^q(X, \mathcal{B}) \rightarrow \check{H}^q(X, \mathcal{C}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

che è il limite diretto delle successioni esatte (20) al variare di tutti i ricoprimenti aperti \mathcal{U} .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo mostrare che l'applicazione naturale

$$\varinjlim \check{H}_\mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \rightarrow \varinjlim \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{C})$$

è un isomorfismo. Questo segue facilmente dal lemma seguente, che afferma essenzialmente che ogni cocatena in \mathcal{C} diviene sollevabile in \mathcal{B} dopo un raffinamento del ricoprimento. \square

LEMMA 5.4. (**di sollevamento**). *Sia $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di X e $c \in \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{C})$. Se X è paracompatto, esiste un ricoprimento più fine $\mathcal{V} = (V_\beta)_{\beta \in J}$ e un'applicazione di raffinamento $\varrho : J \rightarrow I$ tale che $\varrho^q c \in \check{C}_\mathcal{B}^q(\mathcal{V}, \mathcal{C})$.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che \mathcal{U} ammette un ricoprimento localmente finito, possiamo assumere che \mathcal{U} stesso sia localmente finito. Allora esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{W} = (W_\alpha)_{\alpha \in I}$ di X tale che $\overline{W}_\alpha \subset U_\alpha$. Per ogni punto $x \in X$, possiamo scegliere un intorno aperto V_x di x con le seguenti proprietà:

- a) se $x \in W_\alpha$, allora $V_x \subset W_\alpha$;
- b) se $x \in U_\alpha$ o se $V_x \cap W_\alpha \neq \emptyset$, allora $V_x \subset U_\alpha$;
- c) se $x \in U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$, allora $c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \in \check{C}^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}, \mathcal{C})$ ammette un sollevamento in $\mathcal{B}(V_x)$.

Infatti, il punto a) (rispettivamente c)) può essere ottenuto perché x appartiene ad un numero finito di insiemi W_α (rispettivamente U_α), e di conseguenza solo un numero finito di sezioni di \mathcal{C} devono essere sollevate in \mathcal{B} . Il punto b) può essere ottenuto perché x ammette un intorno V'_x che incontra solo un numero finito di insiemi U_α ; allora prendiamo

$$V_x \subset V'_x \cap \bigcap_{U_\alpha \ni x} U_\alpha \cap \bigcap_{U_\alpha \not\ni x} (V'_x \setminus \overline{W}_\alpha).$$

Scegliamo $\varrho : X \rightarrow I$ tale che $x \in W_{\varrho(x)}$ per ogni x . Allora a) implica $V_x \subset W_{\varrho(x)}$, così che $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$ è più fine di \mathcal{U} , e ϱ definisce un'applicazione di raffinamento. Se $V_{x_0 \dots x_q} \neq \emptyset$, abbiamo

$$V_{x_0} \cap W_{\varrho(x_j)} \supset V_{x_0} \cap V_{x_j} \neq \emptyset \text{ per } 0 \leq j \leq q,$$

così che, grazie al b), si ha $V_{x_0} \subset U_{\varrho(x_0 \dots \varrho(x_q))}$. Ora, c) implica che la sezione $c_{\varrho(x_0 \dots \varrho(x_q))}$ ammette un sollevamento in $\mathcal{B}(V_{x_0})$, ed in particolare in $\mathcal{B}(V_{x_0 \dots x_q})$. Quindi $\varrho^q c$ è sollevabile in \mathcal{B} . \square

5.1. Cocatene di Čech alternanti. Per facilità di calcolo, è talvolta più utile considerare un complesso di Čech che ha il vantaggio di produrre gruppi di cocatene più piccoli.

Se \mathcal{A} è un fascio su X e $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di X , sia $A\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \subset \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ il sottogruppo di cocatene di Čech alternanti, che consiste di cocatene di Čech $c = (c_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$ tali che

$$\begin{cases} c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = 0 & \text{se } \alpha_i = \alpha_j, i \neq j, \\ c_{\alpha_{\sigma(0)} \dots \alpha_{\sigma(q)}} = \varepsilon(\sigma) c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \end{cases}$$

per qualsiasi permutazione σ di $\{1, \dots, q\}$ di segnatura $\varepsilon(\sigma)$. Allora il differenziale di Čech (12) di una cocatena alternante è ancora alternante, così $A\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ è un sottocomplesso di $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})$. Mostriamo che l'inclusione induce un isomorfismo in coomologia:

$$(21) \quad H^q(A\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})) \simeq H^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})) = \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}).$$

Scegliamo un ordinamento totale sull'insieme I di indici. Per ogni tale ordinamento, possiamo definire una proiezione $\pi^q : \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow A\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \subset \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ nel modo seguente:

$$(22) \quad c \longmapsto c \text{ alternante tale che } \tilde{c}_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \text{ se } \alpha_0 < \dots < \alpha_q.$$

Dato che π^\bullet è un morfismo di complessi, basta verificare che π^\bullet è omotopa all'identità su $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})$. Per un dato multiindice $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_q)$, che può contenere indici ripetuti, esiste un'unica permutazione $(m(0), \dots, m(q))$ di $(0, \dots, q)$ tale che

$$\alpha_{m(0)} \leq \dots \leq \alpha_{m(q)} \text{ e } m(l) < m(l+1) \text{ se } \alpha_{m(l)} = \alpha_{m(l+1)}.$$

Per $p \leq q$, sia $\varepsilon(\alpha, p)$ il segno della permutazione

$$(0, \dots, q) \longmapsto (m(0), \dots, m(p-1), 0, 1, \dots, \widehat{m(0)}, \dots, \widehat{m(p-1)}, \dots, q)$$

se gli elementi $\alpha_{m(0)}, \dots, \alpha_{m(p)}$ sono tutti distinti, e $\varepsilon(\alpha, p) = 0$ altrimenti. Inoltre, poniamo $h^q = 0$ per $q \leq 0$ e

$$(h^q c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q-1}} = \sum_{0 \leq p \leq q-1} (-1)^p \varepsilon(\alpha, p) c_{\alpha_{m(0)} \dots \alpha_{m(p)} \alpha_0 \alpha_1 \dots \widehat{\alpha_{m(0)}} \dots \widehat{\alpha_{m(p-1)}} \dots \alpha_{q-1}}$$

per $q \geq 1$; osserviamo che l'indice $\alpha_{m(p)}$ è ripetuto due volte nel lato destro. Un calcolo mostra che

$$(\delta^{q-1} h^q c + h^{q+1} \delta^q c)_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} - \varepsilon(\alpha, q) c_{\alpha_{m(0)} \dots \alpha_{m(q)}} = (c - \pi^q c)_{\alpha_0 \dots \alpha_q}.$$

Una conseguenza interessante dell'isomorfismo (21) è la seguente:

PROPOSIZIONE 5.5. *Sia \mathcal{A} un fascio su uno spazio paracompatto X . Se X ha ricoprimenti aperti arbitrariamente fini o almeno un ricoprimento aperto aciclico $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ tale che più di $n+1$ insiemi distinti $U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_n}$ hanno intersezione vuota, allora $H^q(X, \mathcal{A}) = 0$ per $q > n$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, abbiamo $A\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$ per $q > n$. □

6. Fasci (Čech-)Aciclici

Dato un fascio \mathcal{F} su uno spazio topologico X , è usualmente cruciale stabilire se i gruppi di coomologia di Čech $\check{H}^q(U, \mathcal{F})$ di $\mathcal{F}|_U$ svaniscono per $q \geq 1$, e se questo è il caso, per quale tipi di aperti $U \subset X$. Si osservi che non ci si può aspettare di avere $\check{H}^0(U, \mathcal{F}) = 0$ in generale, dal momento che un fascio non banale ammette sempre sezioni locali.

DEFINIZIONE 6.1. Un fascio \mathcal{F} si dice (Čech-)aciclico su un aperto U se $\check{H}^q(U, \mathcal{F}) = 0$ per $q \geq 1$.

6.1. Fasci Fiacchi. Un primo interessante esempio (che si rivelerà di fondamentale importanza in seguito) di fasci aciclici è costituito dalla classe dei fasci fiacchi.

DEFINIZIONE 6.2. Un fascio \mathcal{F} si dice *fiacco* se per ogni aperto $U \subset X$, il morfismo di restrizione $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è suriettivo, cioè se ogni sezione su U di \mathcal{F} si estende a una sezione globale.

Cominciamo col mostrare che la fiacchezza è una proprietà locale.

PROPOSIZIONE 6.3. *Sia \mathcal{F} un fascio dotato della seguente proprietà: per ogni sezione f di \mathcal{F} su un aperto $U \subset X$ e per ogni punto $x \in X$, esiste un intorno aperto Ω di x e una sezione $h \in \mathcal{F}(\Omega)$ tale che $h = f$ su $\Omega \cap U$. Allora \mathcal{F} è fiacco.*

DIMOSTRAZIONE. Sia data $f \in \mathcal{F}(U)$; si consideri l'insieme delle coppie (v, V) con V aperto di X contenente U e v elemento di $\mathcal{F}(V)$ tale che $v|_U = f$. Questo insieme è chiaramente ordinato induttivamente, e pertanto esiste una estensione massimale (v, V) per il lemma di Zorn. Se V fosse contenuto propriamente in X allora per ipotesi, scelto $x \in X \setminus V$, esisterebbe un intorno aperto $\Omega \cap V = \emptyset$ di x e una sezione $h \in \mathcal{F}(\Omega)$ tale che $h|_{U \cap \Omega} = f|_{U \cap \Omega}$. Ma allora $V' = V \cup \Omega$ conterrebbe propriamente V e la sezione (ottenuta grazie agli assiomi di fascio) $v' \in \mathcal{F}(V')$ tale che $v'|_V = v$ e $v'|_\Omega = h$ sarebbe un'estensione di f a V' , contraddicendo la massimalità di V . Dunque $V = X$ e \mathcal{F} è fiacco. \square

Veniamo ora al risultato da cui essenzialmente deriva l'aciclicità dei fasci fiacchi:

TEOREMA 6.4. *Sia*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

una successione esatta di fasci. Se \mathcal{F} è fiacco, allora la successione di gruppi

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{j_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{p_U} \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$$

è esatta per ogni aperto U . Se \mathcal{F} e \mathcal{G} sono fiacchi, allora \mathcal{H} è fiacco.

DIMOSTRAZIONE. Sia data $h \in \mathcal{H}(U)$. Si consideri l'insieme delle coppie (v, V) dove V è un aperto contenuto in U e $v \in \mathcal{G}(V)$ è tale che $p_V(v) = h|_V$. Tale insieme è chiaramente ordinato induttivamente, ed ammette pertanto un elemento massimale (v, V) ; mostreremo che $V = U$. In caso contrario, sia $x \in U \setminus V$, $\Omega \subset U$ un opportuno intorno aperto di x e $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ tale che $p_\Omega(g) = h|_\Omega$. Allora $p_{V \cap \Omega}(v|_{V \cap \Omega} - g|_{V \cap \Omega}) = 0$ e $v|_{V \cap \Omega} - g|_{V \cap \Omega} = j_{V \cap \Omega}(\tilde{f})$, per qualche $\tilde{f} \in \mathcal{F}(V \cap \Omega)$. Poiché \mathcal{F} è fiacco per ipotesi, \tilde{f} ammette un'estensione $\tilde{f} \in \mathcal{F}(X)$. Per costruzione $g|_\Omega + j_X(\tilde{f})|_\Omega$ e v si incollano su $V \cap \Omega$, e la sezione w così ottenuta su $V \cup \Omega$ è tale che $p_{V \cup \Omega}(w) = h|_{V \cup \Omega}$, contraddicendo la massimalità di V ; dunque $V = U$ e $p_U(v) = h$.

Se anche \mathcal{G} è fiacco, v ammette un'estensione $\tilde{v} \in \mathcal{G}(X)$ e $\tilde{h} = p_X(\tilde{v}) \in \mathcal{H}(X)$ è un'estensione di h ; quindi \mathcal{H} è fiacco. \square

Si fissi ora un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X . Dato un aperto $U \subset X$ si ponga

$$\mathcal{U} \cap U = \{U_i \cap U\}_{i \in I},$$

ottenendo in questo modo un ricoprimento aperto di U . Si consideri ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ il prefascio di gruppi abeliani $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ che associa ad ogni aperto $U \subset X$, le n -cocatene di Čech di \mathcal{F} su quell'aperto

$$U \mapsto \check{C}^n(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U).$$

I morfismi di restrizione di questo (a priori) prefascio sono gli ovvi morfismi ereditati dai morfismi di restrizione di \mathcal{F} , e il differenziale di Čech di \mathcal{F} rende $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d)$ un complesso differenziale di prefasci.

La prima osservazione da fare a questo punto è che il prefascio $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è in realtà un fascio di gruppi abeliani: infatti risulta essere il prodotto diretto dei fasci $U \mapsto$

$\mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \dots i_n} \cap U)$ al variare di $i_j \in I$, $j = 0, 1, \dots, n$ (al solito abbiamo posto $U_{i_0 i_1 \dots i_n} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$). Occorre in aggiunta osservare che le sezioni globali $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X)$ di $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sono esattamente le n -cocatene di Čech $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ di \mathcal{F} relative al ricoprimento \mathcal{U} . Inoltre esiste un omomorfismo di fasci canonico

$$j: \mathcal{F} \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

definito al modo seguente: data $f \in \mathcal{F}(U)$, $j(f) \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$ è la 0-cocatena di $\mathcal{F}|_U$ relativa a $\mathcal{U} \cap U$ ottenuta restringendo f a $U \cap U_i$; ovviamente $j \circ d = 0$.

PROPOSIZIONE 6.5. *La successione*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

è una successione esatta di fasci.

DIMOSTRAZIONE. L'esattezza a livello di j è immediata dagli assimi di di fascio. Sia ora $x \in X$ arbitrario e f_x un germe in x di $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $n \geq 1$, annullato da d . Si rappresenti f_x con un n -cociclo $f \in \check{C}^n(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U)$, per qualche U intorno aperto di x ; possiamo supporre senza perdita di generalità che $U \subset U_i$ per qualche $i \in I$. Allora, si ha evidentemente $U \cap U_{i_0 \dots i_{n-1}} = U \cap U_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$ per ogni $i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in I$; si può dunque definire una $(n-1)$ -cocatena $g \in \check{C}^{n-1}(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U)$ ponendo

$$g_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} = f_{i_0 \dots i_{n-1}}.$$

Ora,

$$(dg)_{i_0 i_1 \dots i_n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_n}$$

e la relazione $df = 0$ mostra che

$$f_{i_0 i_1 \dots i_n} - \sum_{k=0}^n (-1)^k f_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_n} = 0$$

sull'aperto $U \cap U_{i_0 \dots i_n} = U \cap U_{i_0 i_1 \dots i_n}$. Dunque $dg = f$, e il teorema è provato. \square

COROLLARIO 6.6. *Un fascio fiacco è aciclico su ogni aperto.*

DIMOSTRAZIONE. È di immediata verifica che se \mathcal{F} è fiacco allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X , il fascio $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è fiacco.

Si consideri ora la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

e si indichi con $\check{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(d: \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$ il q -esimo fascio nucleo di tale successione. Si ottiene in questo modo per ogni $q \in \mathbb{N}$ una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \check{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{Z}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow 0,$$

dove ovviamente $\check{Z}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$; il teorema 6.4 implica per induzione su q che tutti i fasci $\check{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sono fiacchi e fornisce per ogni aperto U e ogni numero naturale q una successione esatta corta di gruppi

$$0 \rightarrow \check{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) \rightarrow \check{Z}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) \rightarrow 0.$$

A questo punto è sufficiente osservare che

$$\check{H}^q(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U) = \check{Z}^q(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U) / \check{B}^q(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U),$$

$$\check{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) = \check{Z}^q(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U),$$

$$\check{B}^q(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}|_U) = \text{Im}(d_U: \check{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)).$$

\square

6.2. Fasci Morbidi. Discuteremo ora un'altra situazione generale che produce fasci aciclici. Sia X uno spazio topologico e S un sottospazio (non necessariamente aperto) di X . Una sezione f di \mathcal{F} su S è un elemento di

$$\varinjlim_{U \text{ aperto}} \mathcal{F}(U),$$

o, equivalentemente una sezione continua $f \in \Gamma(S, \mathcal{F})$ di \mathcal{F} su S , una volta rivisto \mathcal{F} come spazio étalé.

Ricalcando la definizione di fascio fiacco nel caso di sottospazi chiusi, diamo la seguente

DEFINIZIONE 6.7. Un fascio \mathcal{F} su X si dice *morbido* se ogni sezione f di \mathcal{F} su un insieme chiuso S si estende a tutto X .

Prima di procedere serve a questo punto un lemma di carattere topologico.

LEMMA 6.8. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio normale X ; allora esiste un ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ tale che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

È ben noto dalla topologia generale che uno spazio topologico paracompatto è normale. Dunque conseguenza immediata del lemma è che dato un ricoprimento aperto qualunque $\{U_i\}_{i \in I}$ di uno spazio paracompatto X esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{V_i\}_{i \in I}$ tale che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

DIMOSTRAZIONE. Si scelga un buon ordinamento su I , diciamo $I = \{1, 2, \dots, i, \dots\}$ e si ponga

$$F_1 = X \setminus \bigcup_{i > 1} U_i.$$

Allora $F_1 \subset U_1$ è chiuso e, per normalità, esiste un aperto $V_1 \supset F_1$ tale che $\bar{V}_1 \subset U_1$. Supponiamo ora di aver costruito V_j per ogni $j < i$ e poniamo

$$F_i = X \setminus \left[\left(\bigcup_{j < i} V_j \right) \cup \left(\bigcup_{k > i} U_k \right) \right].$$

Per costruzione $F_i \subset U_i$ è chiuso ed ancora per normalità esiste un aperto $V_i \supset F_i$ con $\bar{V}_i \subset U_i$. Abbiamo dunque fornito una famiglia di aperti $\{V_i\}_{i \in I}$ tale che $\bar{V}_i \subset U_i$: resta da mostrare che tale famiglia è un ricoprimento di X .

Sia dunque $x \in X$; per ipotesi esistono un numero finito di aperti U_{i_h} tali che $x \in U_{i_h}$, $h = 1, \dots, n$. Posto $i = \max\{i_1, \dots, i_n\}$, si ha che $x \notin U_k$ per ogni $k > i$. Ora, se $x \notin V_j$ per ogni $j < i$, allora $x \in F_i \subset V_i$; in definitiva $x \in V_j$ per qualche $j \leq i$. \square

Il prossimo lemma fornisce condizioni sufficienti affinché il secondo assioma di fascio valga se si sostituiscono ricoprimenti chiusi al posto dei ricoprimenti aperti.

LEMMA 6.9. Sia \mathcal{F} un fascio di base X e $\{F_i\}$ un ricoprimento chiuso localmente finito di X . Supponiamo di avere sezioni f_i di \mathcal{F} su F_i tali che $f_i = f_j$ su $F_i \cap F_j$; allora esiste un'unica sezione $f \in \mathcal{F}(X)$ che coincide con f_i su F_i per ogni i .

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che esiste una e una sola applicazione $f: X \rightarrow \mathcal{F}$ che coincide con f_i su F_i ; resta da provare che è continua. Ora, ogni $x \in X$ ammette un intorno aperto U_x che interseca in modo non banale solo un numero finito di chiusi del ricoprimento; siano essi F_{i_1}, \dots, F_{i_p} . Poiché gli F_{i_k} sono chiusi, prendendo U_x sufficientemente piccolo, possiamo supporre che $x \in F_{i_k}$ e che esista una sezione g di \mathcal{F} su U_x tale che si abbia

$$g(x) = f(x) = f_{i_1}(x) = \dots = f_{i_p}(x).$$

Ora, essendo gli F_{i_k} in numero finito possiamo anche supporre che $g(z) = f_{i_k}(z)$ per ogni $z \in U_x \cap F_{i_k}$. Ma allora $f(z) = g(z)$ su U_x e f è continua. \square

PROPOSIZIONE 6.10. *Sia \mathcal{F} un fascio su uno spazio topologico X , S un sottospazio di X e f una sezione di \mathcal{F} su S . Se S ammette un sistema fondamentale di intorni paracompatti, allora f si estende ad una sezione su un qualche intorno di S in X .*

Si noti che si stanno facendo solamente ipotesi di tipo topologico e non sul fascio \mathcal{F} . In particolare, la proposizione vale se S è chiuso e X è paracompatto: infatti ogni chiuso di uno spazio paracompatto è anch'esso paracompatto, ed essendo ogni spazio paracompatto normale, ogni chiuso ammette un sistema fondamentale di intorni chiusi.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre senza perdita di generalità X paracompatto. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di S e $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $f_i = f$ su $S \cap U_i$. Rimpiazzando X con un intorno paracompatto di S contenuto in $\bigcup U_i$, possiamo supporre che gli U_i siano un ricoprimento di X localmente finito. Si consideri un ricoprimento più fine $\{V_i\}$ tale che $F_i = \overline{V}_i \subset U_i$ per ogni i e sia W l'insieme degli $x \in X$ tali che

$$x \in F_i \cap F_j \quad \text{implica} \quad f_i(x) = f_j(x).$$

Per il lemma 6.9, applicato al fascio $\mathcal{F}|_W$, esiste una sezione di \mathcal{F} su W che ristretta a $W \cap F_i$ coincide con f_i ; tale sezione evidentemente estende f e resta dunque da mostrare che W è un intorno di S .

A questo proposito, sia $x \in S$; allora esiste un intorno aperto W_x di x che interseca in modo non banale solo un numero finito degli F_i : siano essi F_{i_1}, \dots, F_{i_p} . A meno di restringere W_x , possiamo supporre che $x \in F_{i_k}$ e $W_x \subset \overline{U}_{i_k}$ per ogni $k = 1, \dots, p$. Le sezioni f_{i_1}, \dots, f_{i_p} coincidono per costruzione su x , ed essendo in numero finito, possiamo supporre che coincidano su tutto W_x . A questo punto è chiaro allora che $W_x \subset W$, da cui la proposizione. \square

Il seguente è di immediata dimostrazione.

COROLLARIO 6.11. *Su uno spazio paracompatto ogni fascio fiacco è morbido.*

ESEMPIO 6.12. Su uno spazio paracompatto, il teorema di estensione di Tietze-Urysohn mostra che il fascio \mathcal{C}_X dei germi delle funzioni continue su X è un fascio di anelli morbido. Si osservi comunque che \mathcal{C}_X non è fiacco non appena X non è discreto.

ESEMPIO 6.13. Se X è una varietà differenziabile, il fascio \mathcal{E}_X dei germi delle funzioni lisce su X è un fascio di anelli morbido.

Come per i fasci fiacchi, mostriamo ora che la morbidezza è una proprietà locale.

PROPOSIZIONE 6.14. *Sia \mathcal{F} un fascio su X . Supponiamo che per ogni punto di X esista un intorno U verificante la seguente condizione: tutte le sezioni di \mathcal{F} su un insieme chiuso di X contenuto in U si estendono a U . Allora \mathcal{F} è morbido.*

DIMOSTRAZIONE. Sia f una sezione di \mathcal{F} su un insieme chiuso S . Per paracompattatezza, è possibile trovare un ricoprimento di X localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti dotati della proprietà espressa nell'enunciato e un ricoprimento più fine $\{V_i\}$ tale che $F_i = \overline{V}_i \subset U_i$ per ogni i .

Si consideri ora l'insieme E delle coppie (g, J) , $J \subset I$, dove g è una sezione di \mathcal{F} su $F_J = \bigcup_{j \in J} F_j$ tale che $g = f$ su $S \cap F_J$. Tale insieme E è non vuoto (si prenda un U_i che interseca in modo non banale S e si estenda a F_i la restrizione di f a $S \cap F_i$) e, grazie al lemma 6.9, ordinato induttivamente dalla relazione

$$(g', J') \prec (g'', J'') \quad \text{se} \quad J' \subset J'' \quad \text{e} \quad g' = g'' \quad \text{su} \quad F_{J'}.$$

Sia dunque (g, J) un elemento massimale di E : vogliamo mostrare che $J = I$. Supponiamo per assurdo che esista un $i \in I \setminus J$, e poniamo $J' = J \cup \{i\}$; per giungere a una contraddizione è sufficiente costruire una sezione g' su $F_{J'}$ tale che $g' = g$ su $F_J \cap F_i$ e $g' = f$ su $S \cap F_i$. Ma poiché $g = f$ su $F_J \cap S$, il problema consiste nell'estendere a F_i una sezione data su un chiuso di F_i , il che è sempre possibile per la scelta di U_i , donde la proposizione. \square

Il prossimo risultato è l'analogo dei fasci fiacchi per i fasci morbidi a riguardo delle successioni esatte corte.

TEOREMA 6.15. *Sia*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

una successione esatta di fasci. Se \mathcal{F} è morbido, allora la successione di gruppi

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{H}(S) \rightarrow 0$$

è esatta per ogni chiuso S . Se \mathcal{F} e \mathcal{G} sono morbidi, allora \mathcal{H} è morbido.

DIMOSTRAZIONE. L'ultima affermazione è un'ovvia conseguenza della prima (e del resto di dimostrazione identica al caso fiacco).

Per quanto riguarda la prima affermazione invece, possiamo supporre senza perdita di generalità $S = X$. Sia dunque $h \in \mathcal{H}(X)$: dobbiamo mostrare che tale sezione può venir "sollevata" a una sezione di \mathcal{G} . Poiché tale sollevamento esiste sempre localmente ed X è paracompatto, esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$ di X e sezioni $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$ tali che $p_{U_i}(g_i) = h|_{U_i}$. Si passi ad un ricoprimento aperto più fine $\{V_i\}$ tale che $F_i = \overline{V_i} \subset U_i$ per ogni i e si consideri l'insieme delle coppie (g, J) , $J \subset I$, con g sezione di \mathcal{G} su $F_J = \bigcup_{i \in J} F_i$ tale che g è un sollevamento di $h|_{F_J}$. Evidentemente $E \neq \emptyset$ e l'ordinamento

$$(g', J') \prec (g'', J'') \quad \text{se } J' \subset J'' \text{ e } g''|_{F_{J'}} = g'$$

è induttivo. Sia (g, J) un elemento massimale di E : se, per assurdo, esiste $i \in I \setminus J$ allora $p(g - g_i|_{F_J \cap F_i}) = 0$ e per esattezza esiste $f \in \mathcal{F}(F_J \cap F_i)$ tale che $j(f) = g - g_i$. Per la morbidezza di \mathcal{F} , f si estende a una sezione globale che continueremo a chiamare f . Si ponga ora

$$\tilde{g} = \begin{cases} g & \text{su } F_J \\ g_i + j(f) & \text{su } F_i; \end{cases}$$

allora $p(\tilde{g}) = h$ su $F_J \cup F_i$, contro la massimalità di g . □

COROLLARIO 6.16. *Un fascio morbido su X è aciclico su X .*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è identica al caso fiacco. □

Sia ora $\pi: \mathcal{F} \rightarrow X$ un fascio di gruppi abeliani su X , e definiamo per ogni $f \in \mathcal{F}(X)$ il supporto di f

$$\text{Supp } f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\};$$

si osservi che $\text{Supp } f$ è sempre un insieme chiuso: poiché $\pi: \mathcal{F} \rightarrow X$ è un omeomorfismo locale, l'uguaglianza $f(x) = 0$ implica $f = 0$ in un intorno di x .

TEOREMA 6.17. *Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Se \mathcal{F} è morbido e $f \in \mathcal{F}(X)$, esiste un partizione di f subordinata a $\{U_i\}$. In altre parole esiste una famiglia di sezioni $f_i \in \mathcal{F}(X)$ tale che $\{\text{Supp } f_i\}$ è localmente finita, $\text{Supp } f_i \subset U_i$ e $\sum f_i = f$ su X .*

DIMOSTRAZIONE. Per paracompattatezza possiamo supporre che $\{U_i\}$ sia localmente finito e che esista un ricoprimento più fine $\{V_i\}$ tale che $F_i = \overline{V_i} \subset U_i$ per ogni i .

Si consideri l'insieme E delle famiglie $\{f_i\}_{i \in J}$, $J \subset I$, dove f_i è una sezione di \mathcal{F} su X , con $\text{Supp } f_i \subset U_i$ e

$$\sum_{i \in J} f_i = f \quad \text{su } F_J = \bigcup_{i \in J} F_i.$$

Per la morbidezza di \mathcal{F} , E è non vuoto, e una volta dotato dell'ordinamento

$$\{f'_i\}_{i \in J'} \prec \{f''_i\}_{i \in J''}, \quad \text{se } J' \subset J'',$$

è induttivamente ordinato. Sia dunque $\{f_j\}_{j \in J}$ un elemento massimale di E : dobbiamo provare che $J = I$. Supponiamo per assurdo che così non sia e scegliamo un $i \in I \setminus J$.

Essendo \mathcal{F} morbido, esiste una sezione $f_i \in \mathcal{F}(X)$ tale che $f_i = 0$ su $X \setminus U_i$ e $f_i = f - \sum_{j \in J} f_j$ su $F_j \cup F_i$, il che contraddice la massimalità di $\{f_j\}_{j \in J}$. \square

Se \mathcal{R} è un fascio di anelli su X , un fascio \mathcal{F} su X si dice un fascio di \mathcal{R} -moduli se per ogni aperto $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{R}(U)$ -modulo e se per ogni coppia di aperti $V \subset U$ i morfismi di restrizione $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ sono omomorfismi di moduli compatibili con gli omomorfismi di anelli $\mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{R}(V)$; concludiamo la presente sezione dando una utile proposizione appunto sui fasci di \mathcal{R} -moduli, dove \mathcal{R} è un fascio di anelli unitari.

PROPOSIZIONE 6.18. *Se \mathcal{R} è morbido, ogni fascio \mathcal{F} di \mathcal{R} -moduli è morbido.*

DIMOSTRAZIONE. Ogni sezione $f \in \mathcal{F}(S)$ definita su un insieme chiuso $S \subset X$ ammette un'estensione ad un qualche intorno aperto Ω di S . Sia $\psi \in \mathcal{R}(X)$ tale che $\psi = 1$ su S e $\psi = 0$ su $X \setminus \Omega$ (tale sezione certamente esiste per la morbidezza di \mathcal{R}). Allora ψf , definita come 0 su $X \setminus \Omega$, è un'estensione di f a X . \square

COROLLARIO 6.19. *Sia \mathcal{F} un fascio di \mathcal{E}_X -moduli su una varietà differenziabile X . Allora $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $q \geq 1$.*

6.3. Fasci Fini. Presenteremo ora una terza classe di fasci aciclici su X modellata sull'esempio delle partizioni dell'unità su una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE 6.20. Un fascio \mathcal{F} di gruppi abeliani su X si dice *fine* se per ogni ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}$ di X esiste una famiglia $\{\eta_i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}\}$ di endomorfismi di \mathcal{F} tali che

- (i) $\sum_i \eta_i = \text{Id}_{\mathcal{F}}$,
- (ii) $\eta_i(\mathcal{F}_x) = 0$ per ogni spiga \mathcal{F}_x al variare di x in un qualche intorno del complementare di U_i .

La prossima proposizione mostra come ogni fascio fine sia morbido, e dunque aciclico.

PROPOSIZIONE 6.21. *Ogni fascio fine è morbido.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{F} un fascio fine su X e f una sezione di \mathcal{F} su un chiuso $S \subset X$. Allora esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di S e sezioni $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $f_i = f$ su $S \cap U_i$. Si ponga $U_0 = X \setminus S$ e $f_0 = 0$, in modo tale da estendere $\{U_i\}$ a un ricoprimento aperto di X , che per paracompattatezza possiamo assumere localmente finito. Poiché \mathcal{F} è fine e $\{U_i\}$ è localmente finito esiste una famiglia di morfismi $\{\eta_i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}\}$ tale che

$$\sum \eta_i = \text{Id}_{\mathcal{F}} \quad \text{e} \quad \eta_i(\mathcal{F}_x) = 0$$

per ogni x in un qualche intorno del complementare di U_i . Ora, $\eta_i(f_i) \in \mathcal{F}(U_i)$ è identicamente nulla in un intorno del bordo di U_i e dunque si può estendere a 0 su $\complement U_i$ fornendo così una sezione globale. Allora

$$\tilde{f} = \sum \eta_i(f_i)$$

è l'estensione di f richiesta. \square

COROLLARIO 6.22. *Ogni fascio fine su X è aciclico su X .*

ESEMPIO 6.23. Sia X una varietà differenziabile: la moltiplicazione per una funzione liscia induce un omomorfismo di fasci su \mathcal{E}_X ; dunque \mathcal{E}_X è fine. Analogamente per \mathcal{C}_X su una varietà topologica X .

ESEMPIO 6.24. Sia X il piano complesso e $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni olomorfe su X : è facile verificare che \mathcal{O} non è morbido e dunque che non può essere fine. Infatti, ad esempio, la funzione $f(z) = 1/(z-1)$ è olomorfa in $S = \{|z| \leq 1/2\}$ ma non può essere estesa a una funzione olomorfa su tutto X .

7. Il Teorema di Isomorfismo di De Rham-Weil

In questa sezione introdurremo il concetto di risoluzione di un fascio e dimostreremo il teorema di isomorfismo di De Rham-Weil che permette di calcolare la coomologia di Čech di un fascio a partire da una sua risoluzione aciclica; inoltre mostreremo come ogni fascio ammetta sempre una risoluzione aciclica canonica (detta risoluzione fiacca simpliciale). Come esempio discuteremo la coomologia di De Rahm.

DEFINIZIONE 7.1. Una *risoluzione* (coomologica) di un fascio \mathcal{F} è un complesso differenziale di fasci (\mathcal{L}^\bullet, d) con $\mathcal{L}^q = 0$ se $q < 0$, tale che esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{L}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}^q \xrightarrow{d^q} \mathcal{L}^{q+1} \rightarrow \dots$$

Se $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci e $(\mathcal{M}^\bullet, \tilde{d})$ è un risoluzione di \mathcal{G} , un *morfismo di risoluzioni* $\phi^\bullet: \mathcal{L}^\bullet \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{j} & \mathcal{L}^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{L}^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{L}^q & \xrightarrow{d^q} & \mathcal{L}^{q+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi^0 & & \downarrow \phi^1 & & & & \downarrow \phi^q & & \downarrow \phi^{q+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \mathcal{M}^0 & \xrightarrow{\tilde{d}^0} & \mathcal{M}^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{M}^q & \xrightarrow{\tilde{d}^q} & \mathcal{M}^{q+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

ESEMPIO 7.2. Sia X una varietà differenziabile e \mathcal{E}^q il fascio dei germi delle forme differenziali lisce su X di grado q a valori reali. La derivata esterna d definisce una risoluzione (\mathcal{E}^\bullet, d) del fascio \mathbb{R} delle funzioni localmente costanti a valori reali. Infatti il lemma di Poincaré asserisce che d è localmente esatto nei gradi $q \geq 1$, ed è chiaro che le sezioni di $\ker d^0$ su un aperto connesso sono costanti.

ESEMPIO 7.3 (Risoluzione Fiacca Simpliciale). Sia $\pi: \mathcal{F} \rightarrow X$ un fascio su uno spazio topologico X . Denotiamo con $\mathcal{F}^{[0]}$ il fascio dei germi delle sezioni $X \rightarrow \mathcal{F}$ non necessariamente continue. In altre parole, $\mathcal{F}^{[0]}(U)$ è l'insieme di tutte le applicazioni $f: U \rightarrow \mathcal{F}$ tali che $f(x) \in \mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$ per ogni $x \in U$, o equivalentemente, $\mathcal{F}^{[0]}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$.

È chiaro che per ogni fascio \mathcal{F} su X , $\mathcal{F}^{[0]}$ è un fascio fiacco, ed inoltre esiste un'iniezione canonica

$$j: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{[0]}$$

essendo ogni sezione di \mathcal{F} anche una sezione di $\mathcal{F}^{[0]}$. Il fascio $\mathcal{F}^{[0]}$ viene detto *fascio fiacco canonico* associato a \mathcal{F} . Definiamo ora induttivamente, per ogni $q \geq 1$

$$\mathcal{F}^{[q]} = (\mathcal{F}^{[q-1]})^{[0]}.$$

Le spighe $\mathcal{F}_x^{[0]}$ sono costituite dunque dalle classi di equivalenza di sezioni (che possiamo supporre globali per la fiacchezza di $\mathcal{F}^{[0]}$) $f: X \rightarrow \mathcal{F}$ tali che $f(x_0) \in \mathcal{F}_{x_0}$ e $f \sim g$ se esiste V intorno di x con $f(x_0) = g(x_0)$ per ogni $x_0 \in V$.

Per quanto riguarda le spighe $\mathcal{F}_x^{[1]}$, esse sono costituite dalle classi di equivalenza di sezioni $f: X \rightarrow \mathcal{F}^{[0]}$ tali che $f(x_0) \in \mathcal{F}_{x_0}^{[0]}$ e $f \sim g$ se esiste V intorno di x con $f(x_0) = g(x_0)$ per ogni $x_0 \in V$. Del resto, essendo $f(x_0), g(x_0)$ germi in $\mathcal{F}_{x_0}^{[0]}$, esse corrisponderanno a due sezioni $f_{x_0}, g_{x_0}: X \rightarrow \mathcal{F}$, con $f_{x_0}(x_1), g_{x_0}(x_1) \in \mathcal{F}_{x_1}$; ora $f(x_0) = g(x_0)$ significa che esiste un intorno $V(x_0)$ di x_0 tale che $f_{x_0}(x_1) = g_{x_0}(x_1)$ per ogni $x_1 \in V(x_0)$.

In definitiva, possiamo considerare le spighe $\mathcal{F}_x^{[1]}$ come l'insieme delle classi di equivalenza di applicazioni $f: X \times X \rightarrow \mathcal{F}$ tali che $f(x_0, x_1) \in \mathcal{F}_{x_1}$, con $f \sim g$ se esiste un intorno V di x tale che per ogni $x_0 \in V$ esiste un intorno $V(x_0)$ di x_0 con

$$f(x_0, x_1) = g(x_0, x_1), \quad \forall x_1 \in V(x_0).$$

A questo punto è facile vedere per induzione su q , che le spighe $\mathcal{F}_x^{[q]}$ si possono pensare come le classi di equivalenza di applicazioni $f: X^{q+1} \rightarrow \mathcal{F}$ tali che $f(x_0, \dots, x_q) \in \mathcal{F}_{x_q}$,

con due tali applicazioni identificate se coincidono su un insieme della forma

$$x_0 \in V, \quad x_1 \in V(x_0), \quad \dots, \quad x_q \in V(x_0, \dots, x_{q-1}),$$

dove V è un intorno aperto di x e $V(x_0, \dots, x_j)$ è un intorno aperto di x_j che dipende da x_0, \dots, x_j .

Definiamo ora un differenziale $d^q: \mathcal{F}^{[q]} \rightarrow \mathcal{F}^{[q+1]}$ tramite

$$(d^q f)(x_0, \dots, x_{q+1}) = \sum_{k=0}^q (-1)^k f(x_0, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_{q+1}) + (-1)^{q+1} f(x_0, \dots, x_q)(x_{q+1}).$$

Il significato dell'ultimo termine è il seguente: l'elemento $s = f(x_0, \dots, x_q)$ è un germe in \mathcal{F}_{x_q} , perciò s definisce una sezione continua

$$x_{q+1} \mapsto s(x_{q+1}) = f(x_0, \dots, x_q)(x_{q+1})$$

di \mathcal{F} in un intorno $V(x_0, \dots, x_q)$ di x_q , la quale induce una sezione di $\mathcal{F}^{[q+1]}$ nel modo ovvio. Nei primi gradi abbiamo dunque le relazioni:

$$(23) \quad (js)(x_0) = s(x_0), \quad s \in \mathcal{F}_x,$$

$$(24) \quad (d^0 f)(x_0, x_1) = f(x_1) - f(x_0)(x_1), \quad f \in \mathcal{F}^{[0]},$$

$$(25) \quad (d^1 f)(x_0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - f(x_0, x_2) + f(x_0, x_1)(x_2), \quad f \in \mathcal{F}^{[1]}.$$

TEOREMA 7.4 (Godement). *Il complesso $(\mathcal{F}^{[\bullet]}, d)$ è una risoluzione del fascio \mathcal{F} , detta risoluzione fiacca simpliciale di \mathcal{F} .*

DIMOSTRAZIONE. Se $s \in \mathcal{F}_x$, il germe continuo associato soddisfa ovviamente $s(x_0)(x_1) = s(x_1)$ per $x_0 \in V$, $x_1 \in V(x_0)$ sufficientemente piccoli. Segue facilmente $d^0 \circ j = 0$ e $d^q \circ d^{q-1} = 0$. Per dimostrare che il complesso $(\mathcal{F}^{[\bullet]}, d)$ è una risoluzione di \mathcal{F} , è sufficiente a questo punto verificare che il complesso

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{j} \mathcal{F}_x^{[0]} \xrightarrow{d^0} \dots \rightarrow \mathcal{F}_x^{[q]} \xrightarrow{d^q} \mathcal{F}_x^{[q+1]} \rightarrow \dots$$

è omotopo a zero per ogni $x \in X$. Posto $\mathcal{F}^{[-1]} = \mathcal{F}$, $d^{-1} = j$ e

$$\begin{aligned} h^0: \mathcal{F}_x^{[0]} &\rightarrow \mathcal{F}_x & h^q: \mathcal{F}_x^{[q]} &\rightarrow \mathcal{F}_x^{[q-1]} \\ f &\mapsto f(x), & f &\mapsto (h^q f)(x_0, \dots, x_{q-1}) = f(x, x_0, \dots, x_{q-1}). \end{aligned}$$

Un semplice calcolo mostra ora che $(h^{q+1} \circ d^q + d^{q-1} \circ h^q)(f) = f$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$ e $f \in \mathcal{F}_x^{[q]}$. \square

Supponiamo ora di avere una risoluzione (\mathcal{L}^\bullet, d) di un fascio \mathcal{F} tale che \mathcal{L}^q è aciclico su X per ogni $q \geq 0$. Si ponga $\mathcal{Z}^q = \ker d^q$; allora $\mathcal{F} = \mathcal{Z}^0$ e per ogni $q \geq 1$ otteniamo una successione esatta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}^{q-1} \rightarrow \mathcal{L}^{q-1} \rightarrow \mathcal{Z}^q \rightarrow 0,$$

e la corrispondente successione esatta lunga in coomologia

$$\check{H}^p(X, \mathcal{L}^{q-1}) \xrightarrow{d^{q-1}} \check{H}^p(X, \mathcal{Z}^q) \xrightarrow{\partial^{p,q}} \check{H}^{p+1}(X, \mathcal{Z}^{q-1}) \rightarrow \check{H}^{p+1}(X, \mathcal{L}^{q-1}) = 0.$$

Se $p \geq 1$ anche il primo gruppo è nullo e otteniamo dunque un isomorfismo

$$\partial^{p,q}: \check{H}^p(X, \mathcal{Z}^q) \xrightarrow{\cong} \check{H}^{p+1}(X, \mathcal{Z}^{q-1}).$$

Se $p = 0$, abbiamo $\check{H}^0(X, \mathcal{L}^{q-1}) = \mathcal{L}^{q-1}(X)$ e $\check{H}^0(X, \mathcal{Z}^q) = \mathcal{Z}^q(X)$ è il gruppo dei q -cocicli di $\mathcal{L}^\bullet(X)$, e dunque l'omomorfismo di connessione $\partial^{0,q}$ fornisce un isomorfismo

$$H^q(\mathcal{L}^\bullet(X)) = \mathcal{Z}^q(X) / d^{q-1} \mathcal{L}^{q-1}(X) \xrightarrow{\widehat{\partial}^{0,q}} \check{H}^1(X, \mathcal{Z}^{q-1}).$$

La composizione $\partial^{q-1,1} \circ \dots \circ \partial^{1,q-1} \circ \widehat{\partial}^{0,q}$ definisce pertanto un isomorfismo

$$H^q(\mathcal{L}^\bullet(X)) \xrightarrow{\widehat{\partial}^{0,q}} \check{H}^1(X, \mathcal{Z}^{q-1}) \xrightarrow{\partial^{1,q-1}} \dots \xrightarrow{\partial^{q-1,1}} \check{H}^q(X, \mathcal{Z}^0) = \check{H}^q(X, \mathcal{F}).$$

L'isomorfismo su descritto, si comporta in modo functoriale rispetto ai morfismi di risoluzioni; in altre parole per ogni morfismo di fasci $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e ogni morfismo di risoluzioni $\phi^\bullet: \mathcal{L}^\bullet \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$, si ottiene un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathcal{L}^\bullet(X)) & \longrightarrow & \check{H}^p(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow H^p(\phi^\bullet) & & \downarrow \check{H}^p(\phi) \\ H^p(\mathcal{M}^\bullet(X)) & \longrightarrow & \check{H}^p(X, \mathcal{G}). \end{array}$$

Se $\mathcal{W}^p = \ker(\widetilde{d}^q: \mathcal{M}^q \rightarrow \mathcal{M}^{q+1})$, la functorialità segue immediatamente dal fatto che si hanno i seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{q-1} & \longrightarrow & \mathcal{L}^{q-1} & \longrightarrow & \mathcal{Z}^q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi^{q-1} & & \downarrow \phi^{q-1} & & \downarrow \phi^q \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{W}^{q-1} & \longrightarrow & \mathcal{M}^{q-1} & \longrightarrow & \mathcal{W}^q \longrightarrow 0, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \check{H}^p(X, \mathcal{Z}^q) & \xrightarrow{\partial^{p,q}} & \check{H}^{p+1}(X, \mathcal{Z}^{q-1}) \\ \downarrow \check{H}^p(\phi^q) & & \downarrow \check{H}^{p+1}(\phi^{q-1}) \\ \check{H}^p(X, \mathcal{W}^q) & \xrightarrow{\widetilde{\partial}^{p,q}} & \check{H}^p(X, \mathcal{W}^{q-1}). \end{array}$$

Abbiamo così ottenuto il

TEOREMA 7.5 (Isomorfismo di De Rham-Weil). *Se (\mathcal{L}^\bullet, d) è una risoluzione di \mathcal{F} di fasci \mathcal{L}^p aciclici su X , allora esiste un isomorfismo functoriale*

$$H^q(\mathcal{L}^\bullet(X)) \xrightarrow{\cong} \check{H}^q(X, \mathcal{F}).$$

In particolare, poiché ogni fascio \mathcal{F} ammette sempre la sua risoluzione fiacca simpliciale $\mathcal{F}^{[\bullet]}$, che è costituita da fasci fiacchi e dunque aciclici, otteniamo:

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) \simeq H^q(\mathcal{F}^{[\bullet]}(X)).$$

8. Successione Spettrale di un Complesso Filtrato

La teoria delle successioni spettrali consiste essenzialmente nel calcolare i gruppi di omologia di un modulo differenziale (K, d) tramite “approssimazioni successive”, una volta data una filtrazione $F_p(K)$ di K e noti i gruppi di coomologia dei moduli graduati $G_p(K)$.

DEFINIZIONE 8.1. Sia R un anello commutativo. Una *filtrazione* di un R -modulo M è una successione di sottomoduli $M_p \subset M$, $p \in \mathbb{Z}$, anche denotati con $M_p = F_p(M)$, tale che $M_{p+1} \subset M_p$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$, $\bigcup M_p = M$ e $\bigcap M_p = \{0\}$. Il modulo graduato associato è

$$G(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} G_p(M), \quad G_p(M) = M_p/M_{p+1}.$$

Sia ora (K, d) un modulo differenziale dotato di una filtrazione (K_p) di sottomoduli differenziali (tali cioè che $dK_p \subset K_p$ per ogni p). Per ogni $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, definiamo $Z_r^p, B_r^p \subset G_p(K) = K_p/K_{p+1}$ come

$$\begin{aligned} Z_r^p &= K_p \cap d^{-1}K_{p+r} \pmod{K_{p+1}}, & Z_\infty^p &= K_p \cap d^{-1}\{0\} \pmod{K_{p+1}}, \\ B_r^p &= K_p \cap dK_{p-r+1} \pmod{K_{p+1}}, & B_\infty^p &= K_p \cap dK \pmod{K_{p+1}}. \end{aligned}$$

LEMMA 8.2. *Per ogni p e r , valgono le inclusioni*

$$\dots \subset B_r^p \subset B_{r+1}^p \subset \dots \subset B_\infty^p \subset Z_\infty^p \subset \dots \subset Z_{r+1}^p \subset Z_r^p \subset \dots$$

e il differenziale d induce un isomorfismo

$$\widetilde{d}: Z_r^p/Z_{r+1}^p \xrightarrow{\cong} B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo l'esistenza dell'isomorfismo indotto da d , la catena di inclusioni essendo chiara dalla definizione degli Z_r^p, B_r^p .

Per definizione si ha

$$\begin{aligned} Z_r^p &= (K_p \cap d^{-1}K_{p+r}) / (K_{p+1} \cap d^{-1}K_{p+r}) \\ B_r^p &= (K_p \cap dK_{p-r+1}) / (K_{p+1} \cap dK_{p-r+1}), \end{aligned}$$

e dunque il differenziale d induce un epimorfismo

$$Z_r^p \rightarrow (dK_p \cap K_{p+r}) / (dK_{p+1} \cap K_{p+r})$$

il cui nucleo è $K_p \cap d^{-1}\{0\} \pmod{K_{p+1}} = Z_\infty^p$. Dunque

$$Z_r^p / Z_\infty^p \simeq (K_{p+r} \cap dK_p) / (K_{p+r} \cap dK_{p+1})$$

e

$$\begin{aligned} Z_r^p / Z_{r+1}^p &\simeq (Z_r^p / Z_\infty^p) / (Z_{r+1}^p / Z_\infty^p) \\ &\simeq \frac{(K_{p+r} \cap dK_p) / (K_{p+r} \cap dK_{p+1})}{(K_{p+r+1} \cap dK_p) / (K_{p+r+1} \cap dK_{p+1})} \\ &\simeq (K_{p+r} \cap dK_p) / (K_{p+r} \cap dK_{p+1} + K_{p+r+1} \cap dK_p). \end{aligned}$$

L'asserto segue ora notando che

$$B_r^{p+r} = (K_{p+r} \cap dK_{p+1}) / (K_{p+r+1} \cap dK_{p+1})$$

e

$$B_{r+1}^{p+r} = (K_{p+r} \cap dK_p) / (K_{p+r+1} \cap dK_p),$$

e dunque

$$B_{r+1}^{p+r} / B_r^{p+r} \simeq (K_{p+r} \cap dK_p) / (K_{p+r} \cap dK_{p+1} + K_{p+r+1} \cap dK_p).$$

□

Ora, per ogni $r \in \mathbb{N}$, definiamo un complesso $E_r^\bullet = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_r^p$ con un differenziale $d_r: E_r^p \rightarrow E_r^{p+r}$ di grado r al modo seguente: si ponga $E_r^p = Z_r^p / B_r^p$ e si prenda

$$d_r: Z_r^p / B_r^p \rightarrow Z_r^p / Z_{r+1}^p \xrightarrow{\tilde{d}} B_{r+1}^{p+r} / B_r^{p+r} \hookrightarrow Z_r^{p+r} / B_r^{p+r},$$

dove la prima freccia è l'ovvia proiezione e la terza l'ovvia inclusione. Poiché $B_{r+1}^{p+r} \subset Z_{r+1}^{p+r}$, segue immediatamente dalla definizione di d_r che $d_r \circ d_r = 0$.

PROPOSIZIONE 8.3. *Esiste un isomorfismo canonico $E_{r+1}^\bullet \simeq H^\bullet(E_r^\bullet)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché \tilde{d} è un isomorfismo, si ha

$$\ker d_r = Z_{r+1}^p / B_r^p, \quad \text{Im } d_r = B_{r+1}^{p+r} / B_r^{p+r}.$$

Dunque l'immagine di $d_r: E_r^{p-r} \rightarrow E_r^p$ è B_{r+1}^p / B_r^p e

$$H^p(E_r^\bullet) = (Z_{r+1}^p / B_r^p) / (B_{r+1}^p / B_r^p) \simeq Z_{r+1}^p / B_{r+1}^p = E_{r+1}^p.$$

□

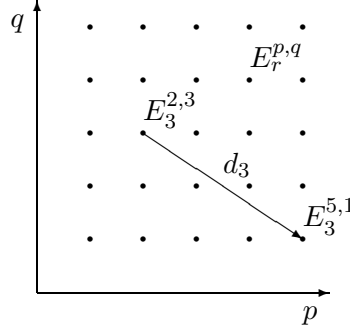
DEFINIZIONE 8.4. La successione di complessi differenziali (E_r^\bullet, d_r) si dice la *successione spettrale* del modulo differenziale filtrato (K, d) .

PROPOSIZIONE 8.5. *Si consideri la filtrazione del modulo di omologia $H(K)$ definita da*

$$F_p(H(K)) = \text{Im}(H(K_p) \rightarrow H(K)).$$

Allora esiste un isomorfismo canonico

$$E_\infty^p = G_p(H(K)).$$

FIGURA 1. Esempio di successione spettrale con $r = 3$ (primo quadrante).

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente si ha $F_p(H(K)) = (K_p \cap d^{-1}\{0\}) / (K_p \cap dK)$, mentre

$$\begin{aligned} Z_\infty^p &= (K_p \cap d^{-1}\{0\}) / (K_{p+1} \cap d^{-1}\{0\}), \\ B_\infty^p &= (K_p \cap dK) / (K_{p+1} \cap dK). \end{aligned}$$

Dunque $E_\infty^p = Z_\infty^p / B_\infty^p = (K_p \cap d^{-1}\{0\}) / (K_{p+1} \cap d^{-1}\{0\} + K_p \cap dK)$. Ma allora

$$\begin{aligned} G_p(H(K)) &= F_p(H(K)) / F_{p+1}(H(K)) \\ &= [(K_p \cap d^{-1}\{0\}) / (K_p \cap dK)] / [(K_{p+1} \cap d^{-1}\{0\}) / (K_{p+1} \cap dK)] \\ &= (K_p \cap d^{-1}\{0\}) / (K_{p+1} \cap d^{-1}\{0\} + K_p \cap dK) = E_\infty^p. \end{aligned}$$

□

Nella maggior parte delle applicazioni, il modulo differenziale K sarà dotato di una graduazione naturale compatibile con la filtrazione. Si consideri ad esempio il caso di un complesso coomologico $K^\bullet = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} K^l$. La filtrazione $K_p^\bullet = F_p(K^\bullet)$ si dice essere *compatibile* con la struttura di complesso differenziale se per ogni p

$$K_p = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} K_p \cap K^q,$$

cioè se le componenti K_p della filtrazione sono omogenee rispetto alla graduazione. Allora definiamo $Z_r^{p,q}, B_r^{p,q}, E_r^{p,q}$, come gli insiemi degli elementi di Z_r^p, B_r^p, E_r^p di grado totale $p+q$. In altri termini abbiamo

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= K_p^{p+q} \cap d^{-1}K_{p+r}^{p+q+1} \pmod{K_{p+1}^{p+q}}, & Z_r^p &= \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} Z_r^{p,q}, \\ B_r^{p,q} &= K_p^{p+q} \cap dK_{p-r+1}^{p+q-1} \pmod{K_{p+1}^{p+q}}, & B_r^p &= \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} B_r^{p,q}, \\ E_r^{p,q} &= Z_r^{p,q} / B_r^{p,q}, & E_r^p &= \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} E_r^{p,q}, \end{aligned}$$

e naturalmente il differenziale d_r ha bigrado $(r, 1-r)$, cioè

$$d_r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}.$$

Per un elemento di bigrado (p, q) , p si dice *grado della filtrazione*, q si dice *grado complementare*, mentre $p+q$ è il *grado totale* (si veda la figura 1).

DEFINIZIONE 8.6. Una filtrazione (K_p^\bullet) di un complesso K^\bullet si dice *regolare*, se per ogni grado l esistono indici $\nu(l) \leq N(l)$ tali che $K_p^l = K^l$ per $p < \nu(l)$ e $K_p^l = 0$ per $p > N(l)$.

Se la filtrazione è regolare, allora le (8) (??) mostrano che

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= Z_{r+1}^{p,q} = \dots = Z_\infty^{p,q}, & \text{se } r > N(p+q+1) - p, \\ B_r^{p,q} &= B_{r+1}^{p,q} = \dots = B_\infty^{p,q}, & \text{se } r > p+1 - \nu(p+q-1), \end{aligned}$$

e quindi $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ per $r \geq r_0(p, q)$. Diremo allora che la successione spettrale *converge* al suo termine limite, e scriveremo simbolicamente

$$E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(K^\bullet)$$

a indicare il seguente fatto: esiste una successione spettrale i cui termini della generazione r -esima sono $E_r^{p,q}$, la successione converge al suo termine limite $E_\infty^{p,q}$, e $E_\infty^{p,l-p}$ è il termine $G_p(H^l(K^\bullet))$ nel modulo graduato associato ad una qualche filtrazione di $H^l(K^\bullet)$.

DEFINIZIONE 8.7. La successione spettrale si dice *collassare* in E_r^\bullet se tutti i termini $Z_k^{p,q}$, $B_k^{p,q}$, $E_k^{p,q}$ sono costanti per $k \geq r$, o equivalentemente se $d_k = 0$ in ogni bigrado per $k \geq r$ (come si vede immediatamente dalla definizione di d_k).

ESEMPIO 8.8. Supponiamo che esistano un intero $r \geq 2$ e un indice q_0 tali che $E_r^{p,q} = 0$ se $q \neq q_0$. Allora $E_r^p = E_r^{p,q_0}$ e

$$d_r: E_r^{p,q_0} \rightarrow E_r^{p+r,q_0-r+1} = 0, \quad (r \geq 2 \Rightarrow q_0 - r + 1 \neq q_0)$$

è l'applicazione nulla. Del resto $E_{r+1}^p = H^p(E_r^\bullet) = E_r^p$, essendo $d_r = 0$. Dunque $E_k^{p,q} = 0$ se $q \neq q_0$ per ogni $k \geq r$. In particolare la successione spettrale collassa in E_r^\bullet e

$$\begin{aligned} G(H^l(K^\bullet)) &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} G_p(H^l(K^\bullet)) \\ &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_\infty^{p,l-p} \\ &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_r^{p,l-p} = E^{l-q_0,q_0}. \end{aligned}$$

Se ne deduce che $G_p(H^l(K^\bullet)) = 0$ se $p \neq l - q_0$, dunque $F_p(H^l(K^\bullet)) = F_{p+1}(H^l(K^\bullet))$ se $p \neq l - q_0$, donde

$$F_p(H^l(K^\bullet)) = \begin{cases} H^l(K^\bullet) & \text{se } p \leq l - q_0 \\ 0 & \text{se } p > l - q_0, \end{cases}$$

cioè

$$H^l(K^\bullet) = E_r^{l-q_0,q_0}.$$

Similmente, se $E_r^{p,q} = 0$ per $p \neq p_0$ e qualche $r \geq 1$, allora

$$H^l(K^\bullet) = E_r^{p_0,l-p_0}.$$

8.1. Calcolo dei Primi Termini. Si consideri una successione spettrale arbitraria. Per $r = 0$, otteniamo

$$Z_0^p = K_p/K_{p+1}, \quad B_0^p = \{0\},$$

quindi $E_0^p = K_p/K_{p+1} = G_p(K)$ e il differenziale d_0 è l'applicazione indotta da d sui quozienti; inoltre $E_1^p = H(G_p(K))$ (segue immediatamente dalla definizione). Ora, abbiamo una successione esatta corda di moduli differenziali

$$0 \rightarrow G_{p+1}(K) \rightarrow K_p/K_{p+2} \rightarrow G_p(K) \rightarrow 0.$$

Otteniamo pertanto un omomorfismo di connessione

$$E_1^p = H(G_p(K)) \xrightarrow{\partial} H(G_{p+1}(K)) = E_1^{p+1}.$$

Poiché sia ∂ che d_1 sono indotti da d , ne segue $\partial = d_1$. Quando K^\bullet è un complesso coomologico filtrato, d_1 è l'omomorfismo di connessione

$$(26) \quad E_1^{p,q} = H^{p+q}(G_p(K^\bullet)) \xrightarrow{\partial} H^{p+q+1}(G_{p+1}(K^\bullet)) = E_1^{p+1,q}.$$

9. Successione Spettrale di un Complesso Doppio

Un *complesso doppio* è un modulo bigraduato $K^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} K^{p,q}$ insieme con un differenziale $d = \partial + \bar{\partial}$ tale che

$$\partial: K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}, \quad \bar{\partial}: K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1},$$

e $d \circ d = 0$. In particolare ∂ e $\bar{\partial}$ soddisfano le relazioni

$$\partial \circ \partial = \bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0, \quad \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0.$$

Il *complesso semplice* associato a $K^{\bullet,\bullet}$ è definito da

$$K^l = \bigoplus_{p+q=l} K^{p,q},$$

insieme con il differenziale d . Supporremo sempre qui che entrambe le graduazioni di $K^{\bullet,\bullet}$ siano positive, cioè che $K^{p,q} = 0$ se $p < 0$ o $q < 0$. La *filtrazione prima* di K^\bullet è definita da

$$K_p = \bigoplus_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ i \geq p}} K^{i,j};$$

il modulo graduato associato a questa filtrazione è ovviamente

$$G_p(K) = K_p / K_{p+1} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} K^{p,j}$$

e il differenziale d_0 indotto da d sul quoziente coincide con $\bar{\partial}$, dal momento che ∂ manda K_p in K_{p+1} . In definitiva otteniamo una successione spettrale i cui primi termini sono dati da

$$E_0^{p,q} = K^{p,q}, \quad E_1^{p,q} = H_{\bar{\partial}}^q(K^{p,\bullet}).$$

Ora, per la (26), d_1 è l'omomorfismo di connessione associato alla successione esatta corta

$$0 \rightarrow K^{p+1,\bullet} \rightarrow K^{p,\bullet} \oplus K^{p+1,\bullet} \rightarrow K^{p,\bullet} \rightarrow 0$$

dove i termini $K^{p+1,\bullet}$ e $K^{p,\bullet}$ sono muniti del differenziale $\bar{\partial}$ e il termine centrale del differenziale indotto da d , che si verifica immediatamente essere $d \oplus \bar{\partial}$. Poiché $d = \partial + \bar{\partial}$ e poiché i cocicli di $K^{p,\bullet}$ sono annullati da $\bar{\partial}$, si conclude che l'omomorfismo di connessione è indotto da ∂ . Di conseguenza otteniamo

$$E_2^{p,q} = H_{\bar{\partial}}^p(E_1^{\bullet,q}) = H_{\bar{\partial}}^p(H_{\bar{\partial}}^q(K^{\bullet,\bullet})).$$

È anche chiaro a questo punto di come sul complesso doppio $K^{\bullet,\bullet}$ avrebbe potuto essere definita in analogia una *filtrazione seconda*, con conseguente ovvio cambiamento dei termini delle prime generazioni della successione spettrale ad essa associata.

Per una tale successione spettrale, diverse caratteristiche addizionali possono venir messe in luce. Per ogni r e l , esiste un omomorfismo iniettivo

$$E_{r+1}^{0,l} \hookrightarrow E_r^{0,l}$$

la cui immagine può venire identificata con l'insieme dei d_r -cocicli in $E_r^{0,l}$; il sottomodulo dei cobordi è in questo caso nullo, essendo $E_r^{p,q} = 0$ per $q < 0$. Similmente, $E_r^{l,0}$ coincide con il suo sottomodulo dei cocicli, ed esiste un omomorfismo suriettivo

$$E_r^{l,0} \twoheadrightarrow E_{r+1}^{l,0} \simeq E_r^{l,0} / d_r(E_r^{l-r,r-1}).$$

Inoltre, la filtrazione su $H^l(K^\bullet)$ inizia a $p = 0$ e finisce a $p = l$, cioè

$$F_0(H^l(K^\bullet)) = H^l(K^\bullet), \quad F^p(H^l(K^\bullet)) = 0 \quad \text{per } p > l.$$

Otteniamo così le due applicazioni canoniche

$$\begin{aligned} H^l(K^\bullet) &\rightarrow G_0(H^l(K^\bullet)) = E_\infty^{0,l} \hookrightarrow E_r^{0,l}, \\ E^{l,0} &\rightarrow E_\infty^{l,0} = G_l(H^l(K^\bullet)) \hookrightarrow H^l(K^\bullet), \end{aligned}$$

dette *omomorfismi di spigolo* della successione spettrale.

TEOREMA 9.1. *Esiste una successione esatta*

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1(K^\bullet) \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \rightarrow H^2(K^\bullet),$$

dove le frecce non specificate sono omomorfismi di spigolo.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto visto sopra, il modulo graduato associato a $H^1(K^\bullet)$ ha solamente due componenti, ed abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow E_\infty^{1,0} \rightarrow H^1(K^\bullet) \rightarrow E_\infty^{0,1} \rightarrow 0.$$

Del resto $E_\infty^{1,0} = E_2^{1,0}$, poiché tutti i differenziali d_r che partono da o che arrivano a $E_r^{1,0}$ devono annullarsi per $r \geq 2$. Similmente, $E_\infty^{0,1} = E_r^{0,1}$ e $E_\infty^{2,0} = E_3^{2,0}$, ottenendo dunque una successione esatta

$$0 \rightarrow E_\infty^{0,1} \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \rightarrow E_\infty^{2,0} \rightarrow 0.$$

Combinare le due successione esatte qui sopra conduce a

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1(K^\bullet) \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \rightarrow E_\infty^{2,0} \rightarrow 0.$$

Tenendo presente l'iniezione $E_\infty^{2,0} \hookrightarrow H^2(K^\bullet)$ nella definizione degli omomorfismi di spigolo, otteniamo la successione esatta richiesta. \square

ESEMPIO 9.2. Sia X una varietà complessa di dimensione n . Si consideri il complesso doppio $K^{p,q} = C_{p,q}^\infty(X, \mathbb{C})$ delle forme differenziali su X lisce e a valori complessi, insieme con la derivata esterna $d = \partial + \bar{\partial}$. Allora esiste una successione spettrale che inizia con i gruppi di coomologia di Dolbeault

$$E_1^{p,q} = H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

e che converge al modulo graduato associato a una filtrazione dei gruppi di coomologia di De Rham:

$$E_r^{p,q} \Rightarrow H_{DR}^{p+q}(X, \mathbb{C}).$$

Questa successione spettrale viene detta *successione spettrale di Hodge-Frölicher*.

9.1. Il Teorema di Leray. Vogliamo ora dare un'applicazione della teoria delle successioni spettrali alla teoria della coomologia di Čech. In particolare vogliamo determinare condizioni sui ricoprimenti aperti \mathcal{U} di uno spazio topologico X affinché, dato un fascio (ed es. di gruppi abeliani) \mathcal{F} , i morfismi naturali

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(X, \mathcal{F})$$

siano isomorfismi; per esempio sappiamo già che lo sono per $p = 0$ e che sono iniettivi per $p = 1$, qualunque siano \mathcal{U} e \mathcal{F} . Il teorema di Leray asserisce che pur di scegliere un ricoprimento aperto "sufficientemente fine" di X relativamente al fascio \mathcal{F} in questione, la coomologia di Čech si calcola direttamente da tale ricoprimento.

DEFINIZIONE 9.3. Un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di uno spazio topologico X si dice *acicilico* (relativamente ad un fascio \mathcal{F}) se per ogni sottoinsieme finito $S \subset I$ e ogni $p \geq 1$ si ha

$$\check{H}^p \left(\bigcap_{i \in S} U_i, \mathcal{F} \right) = 0.$$

TEOREMA 9.4 (Leray). *Sia \mathcal{F} un fascio su X e \mathcal{U} un ricoprimento aperto aciclico di X . Allora*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq \check{H}^p(X, \mathcal{F}), \quad \forall q \geq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si consideri una risoluzione aciclica \mathcal{F}^\bullet di \mathcal{F} , e il complesso doppio $K^{\bullet, \bullet} = \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet)$ dotato dei differenziali

$$\begin{aligned} \partial: \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet) &\rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet), \\ \bar{\partial}: \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}^q) &\rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}^{q+1}), \end{aligned}$$

rispettivamente di Čech e indotto dalla risoluzione.

La filtrazione prima di questo complesso fornisce una successione spettrale i cui termini di prima generazione sono

$$'E_r^{p,q} = H_r^q(\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet)) = \prod_{i_0, \dots, i_p \in I} \check{H}^q(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}),$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene grazie al teorema di De Rham-Weil. L'ipotesi di aciclicità del ricoprimento \mathcal{U} assicura allora che

$$'E_1^{p,q} = \begin{cases} \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \geq 1. \end{cases}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} 'E_2^{p,q} &= H_\partial^p(H_\partial^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet))) \\ &= \begin{cases} H_\partial^p(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

In definitiva $'E_2^{p,0} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $'E_2^{p,q} = 0$ se $q \neq 0$. Per quanto visto nell'esempio 8.8 abbiamo dunque

$$H^l(K^\bullet) = 'E_2^{l,0} = \check{H}^l(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Possiamo ora considerare la filtrazione seconda e ottenere una successione spettrale i cui termini di prima generazione sono dati da

$$''E_1^{p,q} = H_\partial^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}^p)) = \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}^p).$$

Essendo la risoluzione aciclica otteniamo

$$''E_1^{p,q} = \begin{cases} \mathcal{F}^p(X) & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \geq 1, \end{cases}$$

e dunque

$$''E_2^{p,q} = H_\partial^p(H_\partial^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet))) = \begin{cases} H^p(\mathcal{F}^\bullet(X)) & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \geq 1. \end{cases}$$

Ma allora $''E_2^{p,0} = \check{H}^p(X, \mathcal{F})$ per il teorema di De Rham-Weil e $''E_2^{p,q} = 0$ se $q \neq 0$. Invocando ancora l'esempio 8.8 otteniamo questa volta

$$H^l(K^\bullet) = ''E_2^{l,0} = \check{H}^l(X, \mathcal{F}),$$

dunque la tesi. □

Coomologia a valori in un fibrato olomorfo

Autore: Guido Pollini

Notazioni

- una varietà complessa (sinonimo: complex manifold) è uno spazio topologico T_2 , paracompatto e localmente omeomorfo ad aperti di \mathbb{C}^n con cambi di carta biolomorfi; per semplicità trattiamo soltanto oggetti *lisci* nonostante i teoremi di finitezza si estendano almeno formalmente al caso singolare;
- fasci e morfismi di fasci su una varietà complessa M sono sempre olomorfi (i.e. fasci e morfismi di \mathcal{O}_M -moduli);
- indichiamo le sezioni di un fascio \mathcal{F} su un aperto U con $\mathcal{F}[U]$ e non con $\Gamma(U; \mathcal{F})$;
- il generico simbolo \mathcal{O} indica il fascio delle funzioni olomorfe su una certa varietà; in particolare se $U \subseteq M$ è un aperto evitiamo di usare la notazione $(\mathcal{O}_M)|_U$ usando invece \mathcal{O} oppure \mathcal{O}_U , a meno che per chiarezza non sia indispensabile.
- il simbolo $\mathcal{F}^{\oplus k}$ indica la somma diretta $\mathcal{F} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}$.

1. Coomologia a valori in un fibrato olomorfo

Se M è una varietà complessa allora un *fascio libero* su M è per definizione un fascio olomorfo \mathcal{F} isomorfo (come fascio olomorfo) a $\mathcal{O}_M \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_M = \mathcal{O}_M^{\oplus k}$ per un certo k . I fasci che ci interessano sono quelli che localmente sono di questo tipo:

DEFINIZIONE 1.1 (Fascio localmente libero). Un fascio olomorfo \mathcal{F} è detto localmente libero di rango k se per ogni punto esiste un intorno aperto U ed un isomorfismo olomorfo tra $\mathcal{F}|_U$ ed un certo $\mathcal{O}_U^{\oplus k}$.

L'importanza di questo tipo di fasci deriva dalla loro relazione con i fibrati olomorfi; il teorema seguente mostra come in realtà i due concetti siano praticamente equivalenti:

TEOREMA 1.2. *Su una varietà complessa la categoria dei fibrati vettoriali olomorfi (con i morfismi tra fibrati olomorfi di rango non necessariamente costante) è equivalente alla categoria dei fasci olomorfi localmente liberi (con i morfismi di fasci olomorfi).*

DIMOSTRAZIONE. Diamo soltanto un'idea del perché il risultato è vero; sia $F \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale olomorfo di rango $k := \text{rank}_{\mathbb{C}} F$ e formiamo il suo fascio delle sezioni olomorfe \mathcal{F} definito dall'associazione $(U \mapsto \Gamma(U; F))$ per ogni aperto U , dove $\Gamma(U; F) := \{s : U \rightarrow F \mid s \text{ è olomorfa e } \pi \circ s = \text{id}_U\}$. Si tratta chiaramente un fascio olomorfo dal momento che se $s \in \mathcal{F}[U] := \Gamma(U; F)$ e $f \in \mathcal{O}[U]$ allora il loro prodotto puntuale fs definito come $x \mapsto f(x)s(x)$ è ancora una sezione olomorfa di F ed una tale operazione rispetta le restrizioni; il fascio \mathcal{F} è anche localmente libero dal momento che se ci restringiamo ad ogni aperto U abbastanza piccolo $F|_U$ si identifica al fibrato banale $U \times \mathbb{C}^k$ e quindi otteniamo anche un isomorfismo olomorfo tra $\mathcal{F}|_U$ e $\mathcal{O}_U^{\oplus k}$. Adesso supponiamo di avere un morfismo di fibrati vettoriali olomorfi $\Phi : F \rightarrow G$; allora l'associazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[U] = \Gamma(U; F) &\longrightarrow \Gamma(U; G) = \mathcal{G}[U] \\ s &\longmapsto \Phi \circ s \end{aligned}$$

genera un morfismo di fasci olomorfi dal momento che per ogni $x \in U$ abbiamo $(\Phi \circ (fs))(x) = \Phi(f(x)s(x)) = f(x)\Phi(s(x)) = (f\Phi \circ s)(x)$ ovvero $\Phi \circ (fs) = f(\Phi \circ s)$. Si verifica

facilmente che quest'operazione rispetta le composizioni e preserva i morfismi identità e quindi abbiamo costruito un *funtore covariante* tra la categoria dei fibrati olomorfi e quella dei fasci olomorfi localmente liberi; adesso dobbiamo far vedere che esiste in un certo senso un *funtore inverso*.

Supponiamo quindi che \mathcal{F} sia un fascio olomorfo localmente libero e costruiamo un fibrato olomorfo il cui fascio delle sezioni olomorfe sia olomorficamente isomorfo a \mathcal{F} ; sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto per M in modo che su ciascun U_i esista un isomorfismo di fasci olomorfi $\tau_i : \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus k}$; se U_i e U_j sono due tali aperti di banalizzazione sull'intersezione otteniamo l'isomorfismo olomorfo $g_{j,i} := \tau_j \circ \tau_i^{-1} : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^{\oplus k} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^{\oplus k}$ che per olomorfia si rappresenta con una matrice *puntualmente invertibile* $k \times k$ di funzioni olomorfe definite su $U_i \cap U_j$. Detto in altri termini abbiamo un'applicazione olomorfa $g_{j,i} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^k)$ (transizione dalla carta U_i alla carta U_j) e si verifica senza problemi che $g_{i,i} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^k}$ ed inoltre su una qualsiasi tripla intersezione $U_i \cap U_j \cap U_k$ vale la relazione $g_{k,j} \circ g_{j,i} = g_{k,i}$. Grazie a quest'ultima proprietà il ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ e la famiglia di funzioni olomorfe di transizione $\{g_{j,i}\}_{(j,i) \in I^2}$ originano un fibrato vettoriale olomorfo F (si dovrebbe verificare che un atlante di banalizzazione diverso origina un fibrato isomorfo, ma diamolo per buono); senza difficoltà si prova che il fascio delle sezioni olomorfe di F coincide a meno di isomorfismi analitici con il fascio \mathcal{F} di partenza (senza entrare in dettagli si osservi che dare ad esempio una sezione olomorfa per F coincide con lo scegliere una famiglia $\{s_i\}_{i \in I}$ di funzioni olomorfe $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^k$ in modo che su ogni doppia intersezione $U_j \cap U_i$ valga $g_{j,i} \circ s_i = s_j$, ovvero che la collezione sia compatibile con il cambio di carta; una tale famiglia di sezioni origina una famiglia di sezioni del fascio \mathcal{F} che si incollano globalmente coincidendo sulle intersezioni; il discorso si ripete al contrario). Lasciamo per esercizio da dimostrare che l'associazione dei morfismi sopra descritta origina un isomorfismo tra $\mathrm{HOM}_{\mathrm{fib}}(F, G)$ e $\mathrm{HOM}_{\mathcal{O}\text{-sh}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, per cui anche se le due categorie non sono isomorfe (dal momento che ad un fascio analitico localmente libero possono essere associati diversi fibrati isomorfi tra loro, ma comunque distinti) possiamo plausibilmente identificarle (in termini categorici abbiamo usato il fatto che l'equivalenza coincide con la suriettività essenziale e la fedeltà piena). \square

In virtù di quest'identificazione possiamo definire la coomologia di M a valori in un fibrato olomorfo F come $\mathrm{H}^\bullet(M; \mathcal{F})$ dove \mathcal{F} è il fascio olomorfo associato ed quindi in seguito ci focalizzeremo soltanto sulla coomologia a valori in fasci olomorfi localmente liberi; il risultato che proponiamo in queste note è il fondamentale:

TEOREMA 1.3 (Finitezza). *Se M è una varietà complessa compatta e \mathcal{F} un suo fascio olomorfo localmente libero allora la coomologia di M a valori in \mathcal{F} è di tipo finito, ovvero:*

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^q(M; \mathcal{F}) &< \infty && \text{per ogni } q \\ H^q(M; \mathcal{F}) &= 0 && \text{per ogni } q > \dim_{\mathbb{C}} M \end{aligned}$$

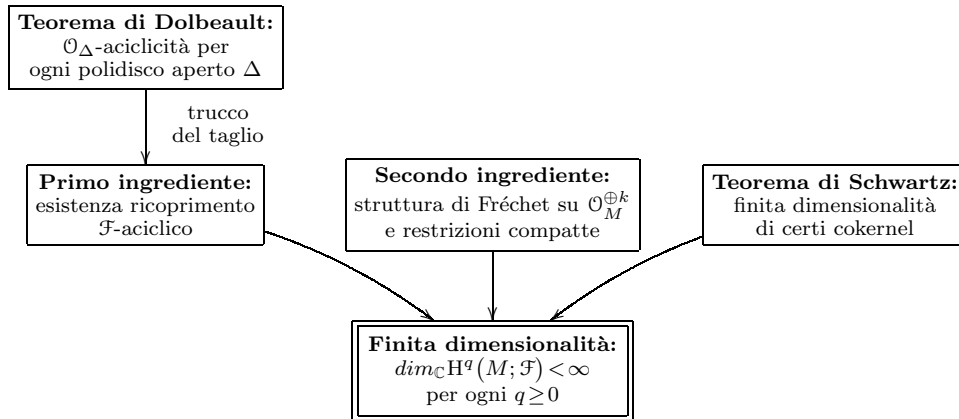
Il secondo risultato è valido anche senza l'ipotesi di compattezza.

OSSERVAZIONE 1.4. Nel risultato precedente la compattezza è essenziale: basta infatti pensare all'insieme $\mathrm{H}^0(\mathbb{C}; \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ ovvero all'insieme delle funzioni olomorfe su tutto \mathbb{C} che ben si guarda dall'essere a dimensione finita; per una varietà compatta M ad esempio sappiamo già che:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(M; \mathcal{O}_M) = \#\{\text{componenti connesse di } M\}$$

dal momento che le uniche funzioni olomorfe su una varietà compatta sono le funzioni localmente costanti e quindi il teorema di finitezza può essere considerato come una notevole e profonda generalizzazione di questo semplice risultato. Per quanto riguarda il secondo enunciato è importante notare che compare la dimensione complessa e non la reale.

La prima parte del teorema di finitezza è sicuramente la più difficile; il seguente diagramma mostra il percorso necessario:



Il primo problema consiste nel costruire un ricoprimento \mathcal{F} -aciclico per poter calcolare la coomologia usando tecniche combinatoriche (coomologia di Čech) e questo richiede anche l'identificazione di una varietà complessa coomologicamente banale (il polidisco) da studiare con la teoria di Dolbeault; tutto in vista del seguente risultato:

TEOREMA 1.5 (Leray). *Sia M una varietà complessa compatta, \mathcal{F} un suo fascio analitico e sia $\mathcal{U} := \{U_1, \dots, U_n\}$ un suo ricoprimento aperto finito; supponiamo che sia anche un ricoprimento \mathcal{F} -aciclico, ovvero:*

$$\forall k \geq 1, \quad \forall i_1, \dots, i_k, \quad \forall p \geq 1 \quad H^p(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}; \mathcal{F}|_{U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}}) = 0$$

Allora la coomologia del complesso di Čech relativo a \mathcal{U} calcola la coomologia di M a coefficienti in \mathcal{F} , ovvero:

$$H^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := H^q(C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{F})) \cong H^q(M; \mathcal{F}) \quad \forall q \geq 0$$

Più precisamente se $H^q(M; \mathcal{F})$ è visto come limite diretto del sistema inverso rappresentato dai vari $H^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ al variare del ricoprimento \mathcal{U} e con i morfismo indotti dalle funzioni di raffinamento, allora la mappa naturale sul limite fornisce l'isomorfismo cercato. In particolare se \mathcal{V} è un raffinamento di \mathcal{U} ed entrambi sono ricoprimenti di Leray per \mathcal{F} allora il morfismo indotto dal raffinamento $H^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ è un isomorfismo (notare che la condizione di \mathcal{F} -aciclicità non pone nessun vincolo su come sono fatte le sezioni, i.e. sugli spazi $H^0(U; \mathcal{F}|_U)$).

Con la descrizione combinatorica a disposizione dobbiamo sfruttare la natura oloomorfa del fascio per scoprire una sua struttura di fascio di Fréchet; a questo punto possiamo invocare un teorema non banale di analisi funzionale astratta (teorema di Schwartz) che ci garantisca la finitezza.

La prossima sezione presenta una digressione sulla teoria di base di Dolbeault che, oltre ad essere indispensabile nella dimostrazione della prima parte del teorema di finitezza, permette di ottenere anche la seconda.

2. Minitoria di Dolbeault

Prima di passare alla costruzione del ricoprimento \mathcal{F} -aciclico (il primo ingrediente) abbiamo bisogno di alcuni teoremi di annullamento sulla coomologia a valori nel fascio delle funzioni olomorfe; dobbiamo anche stabilire qual è il prototipo di varietà banale dal punto di vista oloomorfo, i.e. il corrispondente oloomorfo del dischetto contraibile in coomologia intera. Per far questo dobbiamo introdurre il concetto di forme differenziali lisce di tipo (p, q) su una varietà complessa M .

Precisiamo che in questa sezione un *polidisco* aperto Δ (di poliraggio $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ con $\varepsilon \in]0, +\infty]^n$ e centro in $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ in \mathbb{C}^n sarà per definizione un insieme della forma $\Delta := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall i \ |z_i - c_i| < \varepsilon_i\}$; si tratta quindi di un prodotto di

dischi aperti ed eventualmente anche di copie di \mathbb{C} : in generale non sarà relativamente compatto in \mathbb{C}^n .

Prima di passare all'aspetto formale cerchiamo di dare una descrizione naïve di cosa stiamo facendo; ogni punto di una varietà complessa M ha un intorno biolomorfo ad un aperto di \mathbb{C}^n . In questo ambiente le coordinate complesse z_1, \dots, z_n possono essere viste come reali $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ e viene spontaneo chiedersi se questa discriminazione in parte reale e parte immaginaria possa sopravvivere globalmente; la risposta è chiaramente negativa dal momento che un qualsiasi biolomorfismo mischia irreparabilmente la parte reale con l'immaginaria, ma tuttavia qualcosa sopravvive. Su \mathbb{C}^n esiste un'operazione che scambia le coordinate x_\bullet con le y_\bullet (indotta dalla moltiplicazione per \mathbf{i} che letta dal punto di vista reale effettua uno scambio di coordinate tramite rotazione piana di 90°) e se viene iterata due volte riporta alla configurazione originale ma con segno cambiato; continuare a lavorare con le coordinate (ovvero localmente) non dà grossi risultati, ma il considerare il tutto dal punto di vista infinitesimo (ovvero su vettori tangenti) fornisce l'idea corretta: infatti se $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}$ è una base del fibrato tangente reale di \mathbb{C}^n allora lo scambio di coordinate precedente induce uno scambio $\frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto \frac{\partial}{\partial y_i}$ e $\frac{\partial}{\partial y_i} \mapsto -\frac{\partial}{\partial x_i}$. e questa volta una tale operazione è rispettata dai biolomorfismi visti come diffeomorfismi reali (infatti il differenziale reale di un'applicazione olomorfa rispetta le rotazioni indotte dal coniugio complesso, talvolta abbreviato dicendo che il differenziale di una olomorfa è \mathbb{C} -lineare ovvero che rispetta la moltiplicazione per \mathbf{i}). Quindi il fibrato tangente reale $T^{\mathbb{R}}M$ è dotato di un automorfismo di fibrati vettoriali reali I tale che $I \circ I = -id$, detto *struttura quasi complessa*; in questa forma tuttavia non si va molto lontano e si deve costruire un qualcosa di più legato alla struttura complessa della varietà. Si passa quindi al complessificato $T^{\mathbb{C}}M := T^{\mathbb{R}}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e si estende anche il morfismo I ; il risultato che serve è il seguente:

LEMMA 2.1. *Se definiamo $T^{1,0}M := \ker(I - \mathbf{i}id)$ e $T^{0,1}M := \ker(I + \mathbf{i}id)$ allora vale la seguente decomposizione di fibrati complessi:*

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

Questo garantisce una decomposizione globale in vettori tangenti complessi "olomorfi" e "antiolomorfi" ben definita sull'intera varietà; una forma di tipo (p, q) altro non è che una sezione globale liscia del fibrato $\bigwedge^p(T^{1,0}M)^* \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q(T^{0,1}M)^*$ ovvero una forma differenziale progettata per valutare soltanto cicli che hanno p direzioni olomorfe e q antiolomorfe. Tutte queste affermazioni possono essere giustificate, ma ci basta l'idea di base (se si lavorasse su carta il tutto sarebbe molto più geometrico). In sostanza, la struttura quasi complessa realizza a livello infinitesimo una sorta di distinzione tra elementi infinitesimi olomorfi e antiolomorfi: *questo è quanto sopravvive al cambio di carta della discriminazione locale ingenua fatta con le coordinate.*

Eviteremo tutto questo optando per ragionamenti brutali, ma è importante ricordarsi che stiamo sfruttando il legame tra struttura olomorfa e quasi complessa per far funzionare il tutto e per discriminare globalmente.

Sia U un aperto in \mathbb{C}^n ed indichiamo con $\mathcal{A}^k[U]$ lo \mathbb{C} -spazio vettoriale delle forme differenziali su U a coefficienti C^∞ ed a valori complessi; gli elementi di $\mathcal{A}^k[U]$ sono sezioni lisce del fibrato complesso $(\bigwedge^k TU^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ovvero semplici k -forme differenziali reali per la struttura di varietà differenziabile soggiacente a cui abbiamo attaccato un numero complesso. Con le solite identificazioni ogni forma differenziale si scrive come $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}$ con f funzione differenziabile su U a valori in \mathbb{C} ; è importante tener presente che *stiamo ancora lavorando con forme lisce, non olomorfe.*

Adesso eseguiamo un cambio di coordinate su \mathbb{C} sugli elementi infinitesimi complessificati; la \mathbb{R} -base $dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n$ per $(\mathbb{R}^{2n})^*$ può essere anche considerata come una \mathbb{C} -base per lo \mathbb{C} -spazio vettoriale $(\mathbb{R}^{2n})^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; un semplice conto mostra che ponendo $dz_i := dx_i + \mathbf{i}dy_i$ e $d\bar{z}_i := dx_i - \mathbf{i}dy_i$ la famiglia $dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ realizza una nuova \mathbb{C} -base per $(\mathbb{R}^{2n})^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Possiamo usare questi nuovi termini infinitesimi per discriminare gli elementi di $\mathcal{A}^k[U]$ definendo per ogni $p \geq 0$ e $q \geq 0$ l'insieme:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{p,q}[U] &= \\ &= \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ f dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \mid f \in C^\infty[U], \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n \end{array} \right\} \\ &\subseteq \mathcal{A}^{p+q}[U] \end{aligned}$$

Grazie a questo otteniamo una bigraduazione in \mathbb{C} -sottospazi vettoriali $\mathcal{A}^k[U] = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}[U]$ ed il prossimo passo consiste nel capire come questa decomposizione interagisca con la derivata esterna; la transizione dalla \mathbb{C} -base $dx_1, dy_1, \dots, dx_n, dy_n$ alla nuova \mathbb{C} -base $dz_1, d\bar{z}_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_n$ trasforma le coordinate di vettori cotangenti tramite moltiplicazione per matrici a blocchi del tipo $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ 1 & \mathbf{i} \end{bmatrix}$ e quindi se $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è un'applicazione liscia allora il suo differenziale reale si rappresenta come

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \right)$$

dove per definizione abbiamo posto $\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$, ottenuti facilmente per cambio di base duale. Adesso se lavoriamo con le forme lisce e $\alpha := f dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ è una $(p+q)$ -forma, la sua derivata esterna si rappresenta nel seguente modo:

$$d\alpha = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \right) \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

e da questa espressione è chiaro che abbiamo ottenuto una nuova $(p+q+1)$ -forma appartenente a $\mathcal{A}^{p+1,q}[U] \oplus \mathcal{A}^{p,q+1}[U]$ e per proiezione due nuovi operatori ∂ e $\bar{\partial}$ tali che $d = \partial + \bar{\partial}$. In seguito useremo esclusivamente l'operatore \mathbb{C} -lineare $\bar{\partial}$ per cui notiamo esplicitamente come lavora:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{p,q}[U] &\longrightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}[U] \\ f dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} &\longmapsto \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \right) \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \end{aligned}$$

Semplici conti mostrano che $\partial \circ \partial = 0$, $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ e siccome $d \circ d = 0$ allora $\partial \circ \bar{\partial} = -\bar{\partial} \circ \partial$; tuttavia per il momento non abbiamo ottenuto niente di interessante e per andare avanti dobbiamo far vedere cosa rimane di tutto questo quando cambiamo carta.

Siamo interessati a trasportare il concetto di forme di tipo (p, q) ed operatore $\bar{\partial}$ sulla nostra varietà complessa e quindi è indispensabile sapere cosa accade quando utilizziamo un biolomorfismo per cambiare carta; più in generale, sia $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e calcoliamo $\phi^* dz$ come pullback di una forma liscia tramite funzione liscia, ignorando l'olomorfia. In termini reali abbiamo $\phi(x, y) = \begin{bmatrix} \phi_x(x, y) \\ \phi_y(x, y) \end{bmatrix}$ e quindi siccome $dz = dx + \mathbf{i} dy$ otteniamo per le classiche regole reali: $\phi^* dz = d\phi_x + \mathbf{i} d\phi_y = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} dy \right) + \mathbf{i} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy \right)$. Se ϕ non fosse olomorfa saremmo nei guai, ma in questo caso abbiamo le relazioni di olomorfia di Cauchy-Riemann che ci danno $\frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$ e $\frac{\partial \phi_x}{\partial y} = -\frac{\partial \phi_y}{\partial x}$ ed usando queste si riesce facilmente a riassemblare l'espressione di sopra ottenendo $\phi^* dz = \frac{\partial(\phi_x + \mathbf{i}\phi_y)}{\partial x} dz = \frac{d\phi}{\partial z} dz$. Un calcolo analogo mostra che invece $\phi^* d\bar{z} = \overline{\left(\frac{d\phi}{\partial z} \right)} d\bar{z}$. Evitiamo di trattare il caso generale facendo osservare soltanto che se ad esempio $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ olomorfa a componenti $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ allora ad esempio

$\phi^* dz_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_2} dz_2$ ed analogamente $\phi^* d\bar{z}_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{z}_2} d\bar{z}_2$. A questo punto basta ricordarsi che dalla teoria liscia il pullback ϕ^* è compatibile con il prodotto \wedge per ottenere facilmente *l'invarianza di tipo (p, q) per pullback tramite funzioni olomorfe*. Ma a questo punto dal momento che il pullback ϕ^* commuta anche con la derivata esterna d lo stesso vale per $\bar{\partial}$, essendo ottenuto da d per proiezione su un sottospazio invariante.

Adesso abbiamo qualcosa di più consistente su cui lavorare: una famiglia di fasci (tutte le condizioni sono date su carta e quindi sono locali) e una collezione di morfismi di fasci ($\bar{\partial}$ è certamente compatibile con le restrizioni ad aperti) definiti sull'intera varietà M . Ogni termine $\mathcal{A}_M^{p,q}$ è un fascio liscio (i.e. un fascio di C_M^∞ -moduli) dal momento che la moltiplicazione per una funzione liscia rispetta la struttura (p, q) ; ma nella categoria liscia esistono le partizioni dell'unità e quindi $\mathcal{A}_M^{p,q}$ è anche un fascio fine (i.e. ogni sezione si può frammentare addittivamente su un ricoprimento aperto). Riassumiamo il tutto nel seguente lemma:

LEMMA 2.2 (Complesso fine di Dolbeault). *Sia M una varietà complessa; allora la discriminazione locale di tipo (p, q) sul fascio delle forme differenziali lisce \mathcal{A}_M^k a valori complessi e l'operatore $\bar{\partial}$ originano per ogni intero $p \geq 0$ un ben definito complesso di fasci di tipo fine su M :*

$$\mathcal{A}_M^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p, \dim_{\mathbb{C}} M} \longrightarrow 0$$

Inoltre ha anche una struttura di complesso di fasci di \mathcal{O}_M -moduli e per ogni p il complesso di Dolbeault termina sicuramente in grado $q > \dim_{\mathbb{C}} M$.

Il complesso ad un certo punto termina dal momento che non ci sono più coordinate per andare avanti e l'esistenza di una struttura olomorfa deriva dal fatto che l'operatore $\bar{\partial}$ si annulla sulle funzioni olomorfe ($\bar{\partial}(f\alpha) = (\bar{\partial}f) \wedge \alpha + f\bar{\partial}\alpha = f\bar{\partial}\alpha$) e quindi è un morfismo olomorfo.

Esaminiamo meglio la testa del complesso di Dolbeault; un semplice conto mostra che il nucleo del morfismo $\mathcal{A}_M^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p,1}$ coincide con il fascio olomorfo delle p -forme differenziali olomorfe Ω_M^p , ovvero dalle forme differenziali di tipo $(p, 0)$ a coefficienti olomorfi (basta ricordarsi che una funzione liscia f è olomorfa se e solo se per ogni i risulta $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$) ed in particolare il kernel di $\mathcal{A}_M^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{0,1}$ è proprio \mathcal{O}_M , copiato dentro $\mathcal{A}_M^{0,0}$, il fascio delle funzioni lisce su M .

DEFINIZIONE 2.3 (Forme differenziali olomorfe). Se M è una varietà complessa, definiamo il suo fascio delle p -forme differenziali olomorfe Ω_M^p come:

$$\Omega_M^p[U] := \left\{ \alpha \in \mathcal{A}_M^{p,0}[U] \mid \bar{\partial}\alpha = 0 \right\}$$

dove U è un qualsiasi aperto di M .

Questi fasci sarebbero forse più motivati introducendo il fibrato tangente olomorfo \mathcal{T}_M e considerando in perfetta analogia al caso reale il fibrato delle forme olomorfe $\Omega_M^p := \bigwedge^p (\mathcal{T}_M)^*$, ma non insistiamo su questo punto.

Il primo obiettivo di questa sezione consiste nel dimostrare che:

Target: *il complesso aumentato di fasci di Dolbeault è esatto:*

$$0 \longrightarrow \Omega_M^p \longrightarrow \mathcal{A}_M^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p, \dim_{\mathbb{C}} M} \longrightarrow 0$$

e quindi $H^q(M; \Omega_M^p) \cong H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}[M])$ per ogni $p, q \geq 0$.

Dal momento che l'esattezza di una successione di fasci si valuta sempre spiga per spiga conviene studiare studiare il comportamento locale-puntuale del complesso di Dolbeault in modo perfettamente analogo a quanto si fa di solito con il complesso di De Rham (non a caso avremo bisogno di un versione particolare del lemma di Poincaré); il primo

passo è l'estensione della formula di rappresentazione di Cauchy classica per le funzioni olomorfe a qualsiasi funzione liscia:

LEMMA 2.4 (Formula di Cauchy generalizzata). *Sia U un aperto limitato di \mathbb{C} tale che $\overline{U} - U$ sia l'immagine di una curva semplice, chiusa e rettificabile γ ; allora se $f \in C^\infty[V]$ con V aperto contenente \overline{U} risulta:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \iint_U \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w) \frac{1}{w-z} dw \wedge d\bar{w} \quad \forall z \in U$$

DIMOSTRAZIONE. Un semplice conto mostra l'uguaglianza:

$$d\left(\frac{f(w)}{w-z} dw\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\left(\frac{f(w)}{w-z}\right) d\bar{w} \wedge dw = \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w) \frac{1}{w-z} d\bar{w} \wedge dw$$

Indichiamo con γ_r il bordo di un disco $\Delta_r(z)$ con r scelto in modo che $\Delta_r(z) \subseteq U$ e poniamo $U_r := U - \Delta_r(z)$; usando la formula di Stokes su U_r e facendo attenzione alle orientazioni otteniamo:

$$-\iint_{U_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w) \frac{1}{w-z} dw \wedge d\bar{w} = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Usando coordinate polari centrate in z si vede facilmente che funzione $\frac{1}{w-z}$ in w è integrabile su ogni regione limitata del piano e quindi usando il teorema di convergenza di Lebesgue si ottengono le relazioni che permettono di concludere:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{U_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w) \frac{1}{w-z} dw \wedge d\bar{w} = \iint_U \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w) \frac{1}{w-z} dw \wedge d\bar{w}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{[0, 2\pi]} f(z + re^{it}) i dt = 2\pi i f(z)$$

□

Il prossimo teorema è fondamentale; da notare che otteniamo la risposta cercata in un intorno di un compatto, ma *non viene fatta alcuna ipotesi sulla sua forma*. Nel caso multidimensionale una tale libertà dovrà essere dimenticata.

LEMMA 2.5 (Lemma di Poincaré per $\bar{\partial}$). *Sia U un aperto di \mathbb{C} contenente un compatto K ; se $f d\bar{z} \in \mathcal{A}^{0,1}[U]$ allora esiste un aperto V tale che $K \subseteq V \subseteq U$ ed una funzione liscia $g \in C^\infty[V]$ tale che $\bar{\partial}g = f d\bar{z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo una funzione C^∞ avente supporto compatto in U e che sia indenticamente 1 su un intorno aperto V di K (a questo scopo basta scegliere un intorno aperto W relativamente compatto di K in U con $\overline{W} \subseteq U$, costruire una partizione dell'unità (ϕ, ψ) relativa al ricoprimento $(U - K, W)$ di U e poi scegliere la funzione ψ con $V := U - \text{supp } \phi \subseteq W$); moltiplicando f per questa funzione bernoccolo ed estendendo tale prodotto a zero sul complemento di U otteniamo una nuova f liscia su tutto \mathbb{C} con supporto compatto contenuto in U . Grazie a questa semplice modifica possiamo definire la seguente funzione su tutto \mathbb{C} che è anche liscia (come detto sopra la singolarità non crea problemi per l'integrazione):

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w}$$

Adesso effettuiamo il calcolo della derivata effettuando un cambio di variabile $w \mapsto w+z$ e portando dentro l'integrale gli operatori $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(w+z)}{w} dw \wedge d\bar{w} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f(w+z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{w} dw \wedge d\bar{w}$$

Ma nell'ultimo termine abbiamo l'uguaglianza $\frac{\partial f(w+z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f(w+z)}{\partial \bar{w}}$ e possiamo anche utilizzare la formula di Cauchy generalizzata su un disco compatto contenente il supporto di f che per costruzione iniziale è compatto (l'integrale di f sul bordo è quindi nullo):

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f(w+z)}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w} dw \wedge d\bar{w} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} dw \wedge d\bar{w} = f(z)$$

Questo basta dal momento che su V la funzione f era esattamente la funzione di partenza dell'enunciato. \square

OSSERVAZIONE 2.6. Il teorema precedente non è completamente soddisfacente dal momento che in generale non è possibile ottenere una primitiva su tutto l'insieme di partenza, ma solo su un intorno di un compatto fissato; infatti per usare la formula di Cauchy generalizzata è necessario avere la garanzia di poter fare l'integrale di una funzione usualmente non limitata.

Il passo peggiore è stato fatto; adesso si tratta di iterare il tutto componente per componente per ottenere lo stesso risultato per poldischi in \mathbb{C}^n (se si osserva la dimostrazione seguente si nota che il prossimo risultato vale anche per un prodotto di aperti relativamente compatti in \mathbb{C} , ma non ci servirà molto in seguito visto che in ogni caso serve la struttura di prodotto che in generale non è preservata dai biolomorfismi):

TEOREMA 2.7 (Lemma di Poincaré generale per $\bar{\partial}$). *Sia U un aperto di \mathbb{C}^n e sia Δ un poldisco aperto, relativamente compatto e tale che $\bar{\Delta} \subseteq U$; allora se $q > 0$ e $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}[U]$ con $\bar{\partial}\alpha = 0$ esiste una forma $\beta \in \mathcal{A}^{p,q-1}[\Delta]$ tale che $\bar{\partial}\beta = \alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia quindi $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}$ con $q > 0$ e sia k il più piccolo intero tale che l'espressione di α nella base canonica non presenta termini $d\bar{z}_j$ con $j > k$: la dimostrazione prevede induzione su k ; se $k=0$ allora $\alpha=0$ dal momento che $q > 0$ e non c'è nulla da provare.

Supponiamo quindi che $k > 0$ e di aver provato il risultato nei casi $< k$; per ipotesi $\alpha = d\bar{z}_k \wedge a + b$ con a e b forme che contengono i termini dz_1, \dots, dz_n senza vincoli, ma soltanto termini $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_{k-1}$. Grazie all'ipotesi di chiusura di α otteniamo $0 = \bar{\partial}\alpha = -d\bar{z}_k \wedge \bar{\partial}a + \bar{\partial}b$; se prendiamo un indice $j > k$ non può esserci cancellazione tra termini di $d\bar{z}_k \wedge \bar{\partial}a$ contenenti $d\bar{z}_j$ e quelli di $\bar{\partial}b$ contenenti $d\bar{z}_j$ e quindi tutti questi termini devono annullarsi singolarmente: di conseguenza i coefficienti delle forme a e b sono olomorfi sicuramente nelle variabili z_{k+1}, \dots, z_n .

Adesso iniziamo ad analizzare i coefficienti di a e supponiamo che f sia uno di questi: grazie al lemma di Poincaré (applicato al compatto $\bar{\Delta}$ intersecato con la retta complessa attiva solo in coordinata z_k) esiste una funzione liscia f su Δ tale che $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} = f$ ed inoltre l'espressione esplicita di g mostra chiaramente che se f dipende lisciamente o olomorficamente da qualche parametro allora la stessa cosa vale per g . Di conseguenza se rimpiazziamo ogni coefficiente f di a con il termine g corrispondente otteniamo una $(p, q-1)$ -forma c tale che $\bar{\partial}c = d + d\bar{z}_k \wedge a$, dove d ha soltanto termini con differenziali $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_{k-1}$, per quanto detto sopra sull'olomorfia dei coefficienti di grado $> k$.

Quindi per costruzione $\alpha - \bar{\partial}c = b - d$ contiene soltanto i differenziali coniugati $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_{k-1}$ ed inoltre abbiamo la relazione $\bar{\partial}(\alpha - \bar{\partial}c) = 0$; quindi possiamo usare l'ipotesi induttiva per scrivere $\bar{\partial}\tau = \alpha - \bar{\partial}c$ per una certa $\tau \in \mathcal{A}^{p,q-1}[\Delta]$ e da questa relazione segue immediatamente che scegliendo $\beta := \tau + c$ abbiamo ottenuto la forma primitiva voluta su Δ e questo conclude la dimostrazione. \square

Come già osservato sopra il risultato ottenuto non è ancora ottimale a causa della riduzione obbligatoria, ma basta comunque per ottenere un risultato fondamentale; consideriamo una stringa $\mathcal{A}_M^{p,k-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p,k} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p,k+1}$ del complesso di Dolbeault di una varietà complessa M e ricordiamo che l'esattezza della stringa nel nodo centrale equivale all'esattezza della stringa-spiga $(\mathcal{A}_M^{p,k-1})_x \xrightarrow{\bar{\partial}_x} (\mathcal{A}_M^{p,k})_x \xrightarrow{\bar{\partial}_x} (\mathcal{A}_M^{p,k+1})_x$ su ogni punto $x \in M$;

dal momento che $\bar{\partial}_x \circ \bar{\partial}_x = 0$ per verificare l'esattezza basta provare che se α è il germe su x di una (p, k) -forma con $\bar{\partial}\alpha = 0$ su un intorno di x allora esiste un germe β su x di una $(p, k-1)$ -forma tale che su un intorno di x si abbia $\bar{\partial}\beta = \alpha$ (non è rilevante l'ampiezza degli intorni, possiamo restringere tutto quello che vogliamo dal momento che lavoriamo con germi). Adesso scegliendo un intorno U di x in M biolomorfo ad un aperto di \mathbb{C}^n ed osservando che il biolomorfismo permette di identificare $\mathcal{A}_M^{p,k}[U]$ con $\mathcal{A}^{p,k}[U]$ otteniamo l'esattezza su ogni spiga usando il lemma di Poincaré generale per $\bar{\partial}$:

COROLLARIO 2.8 (Risoluzione fine di Dolbeault). *Il seguente complesso di fasci di Dolbeault su una varietà complessa M è esatto:*

$$\mathcal{A}_M^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{p,\dim_{\mathbb{C}} M} \longrightarrow 0.$$

Il complesso $\mathcal{A}_M^{p,\bullet}$ è una risoluzione fine (e quindi aciclica) del fascio delle forme differenziali olomorfe Ω_M^p e quindi la sua coomologia sulle sezioni globali calcola la coomologia di M a valori in Ω_M^p , ovvero:

$$H^q(M; \Omega_M^p) \cong H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}[M]) \quad \text{per ogni } q \geq 0$$

In particolare otteniamo che $H^q(M; \Omega_M^p) = 0$ per ogni $q > \dim_{\mathbb{C}} M$ e $p \geq 0$.

L'ultima parte dell'enunciato deriva dalla ben nota possibilità di calcolare la coomologia a valori in \mathcal{F} utilizzando la coomologia delle sezioni globali di una risoluzione di tipo fine di \mathcal{F} e dal fatto che su una varietà complessa non possono esistere forme non banali di tipo (p, q) se p o q è strettamente maggiore della dimensione complessa (non c'è spazio per costruire abbastanza differenziali elementari, come si vede facilmente in coordinate). In realtà abbiamo ottenuto molto di più di quello che ci serve dal momento che in tutto quello che segue sfutteremo soltanto la risoluzione fine $\mathcal{A}_M^{0,\bullet}$ del fascio \mathcal{O}_M .

Detto questo, l'ultimo compito che ci spetta è rimuovere la limitazione di compattezza presente nel lemma di Poincaré per un polidisco; questo conduce al celebre teorema di Dolbeault, il teorema fondamentale di aciclicità per il fascio delle forme olomorfe su un polidisco (ed in particolare per le funzioni olomorfe).

TEOREMA 2.9 (Dolbeault). *Se Δ è un qualsiasi polidisco aperto in \mathbb{C}^n (non necessariamente relativamente compatto) allora:*

$$H^q(\Delta; \Omega_{\Delta}^p) = 0 \quad \text{per ogni } q > 0, p \geq 0$$

Lo stesso risultato vale per ogni insieme biolomorfo ad un polidisco aperto.

DIMOSTRAZIONE. Come abbiamo visto il complesso di Dolbeault $\mathcal{A}_{\Delta}^{p,\bullet}$ fornisce una risoluzione fine del fascio Ω_{Δ}^p e quindi per dimostrare il teorema dobbiamo far vedere che se $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}[\Delta]$ (con $q > 0$) e $\bar{\partial}\alpha = 0$ allora esiste una $\beta \in \mathcal{A}^{p,q-1}[\Delta]$ tale che $\bar{\partial}\beta = \alpha$ (i.e. dobbiamo rimuovere il tanto temuto shrinking del lemma di Poincaré).

Fissiamo un'eshaustione di polidischi aperti *relativamente compatti* $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_k \subseteq \dots \subseteq \Delta$ in modo che $\Delta = \bigcup_{k \geq 1} B_k$ e $\bar{B}_k \subseteq B_{k+1}$; per prima cosa costruiamo per ogni m un elemento $\beta_m \in \mathcal{A}^{p,q-1}[\Delta]$ tale che $\bar{\partial}\beta_m = \alpha$ su B_m . Infatti grazie al lemma di Poincaré [2.7] esiste un elemento $\beta'_m \in \mathcal{A}^{p,q-1}[B_{m+1}]$ che su B_{m+1} soddisfa la relazione $\bar{\partial}\beta'_m = \alpha$; adesso basta prendere una funzione liscia su Δ in modo che $\text{supp } \phi \subseteq B_{m+1}$ e su B_m sia identicamente 1 ed osservare che il prodotto $\beta_m = \beta'_m \phi$ estendendosi in modo liscio su tutto Δ soddisfa le richieste volute su B_m .

Consideriamo adesso il caso $q > 1$ e mostriamo che la successione $\{\beta_m\}$ si può costruire in modo che risulti $\beta_m = \beta_{m+1}$ su B_{m-1} ; supponiamo di aver già scelto $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ e prendiamo $\tilde{\beta}_{m+1} \in \mathcal{A}^{p,q-1}[\Delta]$ in modo che sopra B_{m+1} si abbia $\bar{\partial}\tilde{\beta}_{m+1} = \alpha$ e quindi che su B_m valga $\bar{\partial}(\beta_m - \tilde{\beta}_{m+1}) = 0$. Per ipotesi induttiva possiamo assumere che esista una $\gamma \in \mathcal{A}^{p,q-2}[B_m]$ con $\beta_m - \tilde{\beta}_{m+1} = \bar{\partial}\gamma$; con la solita tecnica costruiamo una funzione bump ψ su B tale che $\text{supp } \psi \subseteq B_m$ e $\psi|_{B_{m-1}} = 1$ e formiamo

$\beta_{m+1} := \tilde{\beta}_{m+1} + \bar{\partial}(\psi\gamma)$. Allora $\beta_{m+1}|_{B_{m-1}} = \tilde{\beta}_{m+1}|_{B_{m-1}} + \bar{\partial}\gamma|_{B_{m-1}} = \beta_m|_{B_{m-1}}$ e $\bar{\partial}\beta_{m+1} = \bar{\partial}\tilde{\beta}_{m+1} = \alpha$ su B_{m+1} e quindi la successione $\{\beta_m\}$ converge ad una forma liscia $\beta \in \mathcal{A}^{p,q-1}[\Delta]$ in modo che $\bar{\partial}\beta = \alpha$ su Δ (il limite è liscio dal momento che la successione per costruzione si stabilizza nell'intorno di ogni punto).

Resta da verificare il teorema per $q = 1$; costruiamo questa volta una successione $\{\beta_m\}$ di forme in $\mathcal{A}^{p,0}[\Delta]$ in modo che $\bar{\partial}\beta_m = \alpha$ su B_m e $\|\beta_{m+1} - \beta_m\|_{B_{m-1}} < \frac{1}{2^m}$, dove con $\|-\|_{B_{m-1}}$ abbiamo indicato il *sup* di tutte le componenti della forma. Questo infatti basterebbe per concludere perché darebbe una successione uniformemente convergente localmente soddisfacente alle nostre richieste (per una giustificazione a questa affermazione si veda la fine della dimostrazione). Supponiamo quindi di aver scelto β_1, \dots, β_m e selezioniamo una $\tilde{\beta}_{m+1} \in \mathcal{A}^{p,0}[\Delta]$ tale che $\bar{\partial}\tilde{\beta}_{m+1} = \alpha$ su B_{m+1} ; allora la forma $\beta_m - \tilde{\beta}_{m+1}$ su B_m è olomorfa (i.e. vive in $\Omega^p[B_m]$) essendo una forma $(p, 0)$ annullata da $\bar{\partial}$ e quindi i suoi coefficienti ammettono espansione in serie di potenze. Quindi lavorando componente per componente, sul disco piccolo $B_{m-1} \subseteq B_m$ può essere approssimata da una forma a coefficienti polinomiali P in modo che $\|\beta_m - \tilde{\beta}_{m+1} - P\|_{B_{m-1}} < \frac{1}{2^m}$; la forma P è una forma olomorfa dal disco Δ ed a questo punto basta porre $\beta_{m+1} := \tilde{\beta}_{m+1} + P$. Allora $\bar{\partial}\beta_{m+1} = \bar{\partial}\tilde{\beta}_{m+1} = \alpha$ su B_{m+1} ed inoltre $\|\beta_{m+1} - \beta_m\|_{B_{m+1}} < \frac{1}{2^m}$ su B_{m+1} concludendo la dimostrazione.

Per verificare la lisciezza, lavoriamo su B_k ed osserviamo che anche la successione di forme $\{(\beta_j - \beta_k)|_{B_k}\}_{j>k}$ converge localmente uniformemente essendo ancora di Cauchy ed ogni termine ha coefficienti olomorfi (per costruzione infatti $\bar{\partial}(\beta_j - \beta_k) = 0$); per le proprietà base delle funzioni olomorfe la forma limite θ_k è ancora olomorfa su B_k , i.e. $\theta_k \in \Omega^p[B_k]$ e quindi $\lim_{j>k} \beta_j = \theta_k + \beta_k$ ha coefficienti lisci e quindi vive in $\mathcal{A}^{p,0}[B_k]$; ripetendo lo stesso ragionamento per ogni k otteniamo che il limite $\beta \in \mathcal{A}^{p,0}[\Delta]$ e concludiamo. \square

La dimostrazione precedente, unita al lemma di Poincaré in una variabile fornisce gratuitamente anche un altro noto risultato: grazie al complesso di Dolbeault sappiamo che su una 1-varietà complessa la coomologia in grado strettamente maggiore di 1 a coefficienti nelle funzioni o forme olomorfe è nullo. Viene da chiedersi cosa succede in dimensione 1 ed il prossimo teorema fornisce la risposta in un caso molto particolare:

TEOREMA 2.10 (Mittag-Leffler). *Se U è un aperto non vuoto di \mathbb{C} allora $H^1(U; \mathcal{O}_U) = H^1(U; \Omega_M^1) = 0$*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione del teorema di Dolbeault si ricicla immediatamente partendo da un'eshaustione qualsiasi per U ed applicando esplicitamente il lemma di Poincaré in una variabile: in questo caso infatti non serve lavorare con sottoinsiemi a forma di disco ed i termini dell'eshaustione vanno bene lo stesso.

Questo non può essere fatto in dimensione ≥ 2 dal momento che in questo caso il lemma di Poincaré non vale per compatti arbitrari, ma solo per compatti *prodotto* (in particolare per la chiusura di un polidisco come descritto nel lemma) visto che si tratta di utilizzare il lemma di Poincaré componente per componente: in generale un'eshaustione non potrà avere termini di questo tipo. Si provi ad esempio ad esaurire il disco aperto unitario di \mathbb{C}^2 con un'eshaustione prodotto per vederne l'impossibilità. \square

Per completezza notiamo che il risultato sopra provato è falso se si considerano 1-varietà complesse qualsiasi; ad esempio un teorema non banale afferma che se M è una 1-varietà compatta e connessa (ovvero una superficie di Riemann) allora $H^1(M; \mathcal{O}_M) \cong \mathbb{C}^g$ dove g è un *invariante topologico intero* (il genere topologico di M , coincidente con $\frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} H_1(M; \mathbb{R})$) ed inoltre $H^1(M; \Omega_M^1) \cong H^0(M; \mathcal{O}_M) \cong \mathbb{C}$ (dualità di Serre).

Concludiamo con una semplice osservazione:

OSSERVAZIONE 2.11 (Invarianza). Ogni biolomorfismo $\phi: M \xrightarrow{\cong} N$ tra due varietà complesse induce le uguaglianze $\phi_*\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_N$ e $\phi_*\Omega_M^p = \Omega_N^p$ per ogni $p \geq 0$; inoltre

l'immagine diretta ϕ_* realizza un isomorfismo di complessi analitici tra $\mathcal{A}_M^{\bullet,\bullet}$ e $\mathcal{A}_N^{\bullet,\bullet}$ per cui possiamo intercambiare spazi biolomorfi tra loro senza modificare la loro coomologia a valori nei suddetti fasci.

3. Costruzione del ricoprimento \mathcal{F} -aciclico

Nella dimostrazione del teorema di finitezza vogliamo poter descrivere la coomologia di Čech evitando limiti diretti e per far questo abbiamo bisogno del teorema di Leray; per poterlo applicare è necessaria l'esistenza di un ricoprimento \mathcal{F} -aciclico ed in generale si tratta di un problema non banale.

Ad esempio nel caso del fascio costante \mathbb{Z}_M possiamo usare una qualsiasi metrica riemanniana su M per ricoprirla con una famiglia di aperti geodeticamente convessi: l'intersezione non vuota di due aperti geodeticamente convessi è ancora un aperto geodeticamente convesso e quindi diffeomorfo a $\mathbb{R}^{2 \dim_{\mathbb{C}} M}$, grazie ai teoremi di base in geometria riemanniana. Sapendo che uno spazio contraibile è aciclico per ogni fascio costante abbiamo ottenuto un ricoprimento \mathbb{Z}_M -aciclico. Alternativamente possiamo triangolare M e prendere il ricoprimento formato dalle stelle aperte di ogni vertice, ma serve comunque un teorema non banale per garantire la triangolabilità di ogni varietà complessa; in ogni caso l'esistenza di un ricoprimento aciclico per il fascio costante non è banale. La situazione per il fascio delle funzioni olomorfe \mathcal{O}_M si presenta più difficile dal momento che intervengono questioni non soltanto di topologia, ma anche di olomorfia e quindi di analisi.

Per i nostri scopi basta dimostrare l'esistenza di un ricoprimento aciclico arbitrariamente fine per il fascio \mathcal{O}_M dal momento che siamo interessati a coomologia a valori in un fascio localmente libero; potremmo invocare (come fanno quasi tutti gli autori) lo stesso risultato per i fasci analitici coerenti, ma si tratta di un teorema molto più difficile; presentiamo in queste note una furba e veloce alternativa.

Iniziamo con un giochetto coomologico che sfrutta la successione esatta lunga in coomologia associata ad una successione esatta corta di fasci per ottenere informazioni di aciclicità (la paracompattatezza è del tutto superflua: per ottenere una trattazione self-contained utilizziamo la coomologia definita secondo Čech, ma in generale usando le risoluzioni iniettive risulta inutile):

LEMMA 3.1. *Sia $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ una successione esatta corta di fasci su uno spazio topologico paracompatto U ; allora se i fasci estremi \mathcal{A} e \mathcal{C} sono aciclici anche il fascio centrale \mathcal{B} lo è. Analogamente se i primi due fasci \mathcal{A} e \mathcal{B} sono aciclici allora anche l'ultimo fascio \mathcal{C} lo è.*

DIMOSTRAZIONE. Basta considerare la successione esatta lunga:

$$H^1(U; \mathcal{A}) \rightarrow H^1(U; \mathcal{B}) \rightarrow H^1(U; \mathcal{C}) \rightarrow H^2(U; \mathcal{A}) \rightarrow H^2(U; \mathcal{B}) \rightarrow H^2(U; \mathcal{C}) \rightarrow \dots$$

che nel primo caso diventa

$$0 \rightarrow H^1(U; \mathcal{B}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow H^2(U; \mathcal{B}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Nel secondo caso le cose vanno esattamente nello stesso modo, ma attenzione a cosa accadrebbe al termine $H^1(U; \mathcal{A})$ se \mathcal{B} e \mathcal{C} fossero aciclici: questo ragionamento non direbbe nulla (infatti basta vedere la nota di sotto). \square

OSSERVAZIONE 3.2. In generale nel lemma precedente l'aciclicità dei fasci terminali \mathcal{B} e \mathcal{C} non implica quella per \mathcal{A} ; come controesempio si prenda come varietà la corona aperta $A := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \|z\| < 2\}$ e si formi la successione esponenziale di fasci di gruppi abeliani $0 \rightarrow \mathbb{Z}_A \rightarrow \mathcal{O}_A \xrightarrow{e^{2\pi i}} \mathcal{O}_A^* \rightarrow 0$. A questo punto \mathbb{Z}_A non è un fascio aciclico in quanto $H^1(A; \mathbb{Z}_A)$ è isomorfo all' H^1 singolare, ovvero a \mathbb{Z} (mentre invece se $q \geq 2$ allora $H^q(A; \mathbb{Z}_A) = 0$ essendo A omotopo ad una circonferenza). Inoltre grazie alla risoluzione

fine di Dolbeault nella forma $0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{A}_A^{0,0} \longrightarrow \mathcal{A}_A^{0,1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$ sappiamo che $H^q(A; \mathcal{O}_A) = 0$ se $q \geq 2$ e grazie al teorema di Mittag-Leffler¹ anche $H^1(A; \mathcal{O}_A) = 0$; con queste informazioni scrivendo la successione lunga in coomologia si vede che il fascio \mathcal{O}_A^* è aciclico, il fascio \mathcal{O}_A lo è per quanto detto sopra, mentre il primo fascio \mathbb{Z}_A ben si guarda dall'esserlo.

LEMMA 3.3. *Se U è una varietà complessa aciclica per il suo fascio delle funzioni olomorfe (i.e. $H^q(U; \mathcal{O}_U) = 0$ se $q > 0$) e k è un intero fissato allora:*

$$\forall q > 0 \quad H^q(U; \mathcal{O}_U^{\oplus k}) = 0$$

ovvero U è aciclico per ogni suo fascio globalmente libero.

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione sull'indice k utilizzando il lemma precedente e la successione esatta corta $0 \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_U \oplus \mathcal{O}_U^{\oplus k-1} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus k-1} \longrightarrow 0$ (inclusione sul primo addendo e proiezione sul secondo) e scriviamo la successione esatta lunga in coomologia; per concludere basta osservare cosa si banalizza per ipotesi induttiva. \square

Possiamo adesso presentare il risultato chiave di questa sezione:

TEOREMA 3.4 (Primo ingrediente). *Ogni fascio olomorfo localmente libero \mathcal{F} su una varietà complessa ammette un ricoprimento \mathcal{F} -aciclico arbitrariamente fine.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per comodità $n := \dim_{\mathbb{C}} M$ e cominciamo con il costruire un ricoprimento aperto finito $\{\Delta_j\}_{j \in J}$ per M in modo che ogni suo elemento Δ_j sia biolomorfo ad un polidisco aperto in \mathbb{C}^n e tale che se un'intersezione finita $\Delta_{j_1} \cap \dots \cap \Delta_{j_k}$ è non vuota allora *tutti* i suoi termini $\Delta_{j_1}, \dots, \Delta_{j_k}$ siano contenuti in una carta comune di banalizzazione sia per M che per il fascio \mathcal{F} (in seguito il fatto di dover analizzare intersezioni che sono originate da insiemi tutti interamente contenuti nel dominio di un'unica carta sarà essenziale).

Supponiamo quindi fissato il ricoprimento che fissa la finezza e raffiniamolo ad un ricoprimento aperto finito $\{V_i\}_{i \in I}$ composto da domini di carte banalizzanti per la varietà ed il fascio; utilizzando la paracompattatezza di M (in realtà in questo caso abbiamo la compattezza e l'assioma T_2) ne costruiamo uno shrinking $\{W_i\}_{i \in I}$, ovvero un altro ricoprimento aperto finito indicizzato sempre nello stesso modo e tale che per ogni $i \in I$ si abbia $\overline{W_i} \subseteq V_i$. Formiamo un terzo ricoprimento aperto $\{U_x\}_{x \in M}$ in modo che ogni U_x sia un qualsiasi V_i contenente x ovvero il dominio di una carta di banalizzazione e cerchiamo di modificare un numero finito di volte ciascuno di questi aperti per soddisfare le nostre richieste, usando il ricoprimento iniziale ed il suo shrinking; per la precisione possiamo ridurre ogni U_x in modo che sia biolomorfo ad un polidisco e tale che per ogni intersezione $U_x \cap W_i \neq \emptyset$ non vuota risulti $U_x \subseteq V_i$ (se $x \in \overline{W_i}$ allora scelgo come nuovo U_x un intorno aperto per x dentro $U_x \cap V_i$ biolomorfo ad un polidisco aperto secondo la carta V_i ; se invece $x \notin \overline{W_i}$ allora scelgo come nuovo U_x un intorno aperto per x contenuto in $(M - \overline{W_i}) \cap U_x$ in modo che il nuovo U_x e W_i non si tocchino più; dal momento che per compattezza i nostri ricoprimenti erano finiti ogni U_x deve essere modificato solo un numero finito di volte). Adesso basta estrarre da $\{U_x\}$ un sottoricoprimento finito $\{\Delta_j\}_{j \in J}$ dal momento che, se ad esempio $y \in U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_l} \neq \emptyset$, allora y appartiene ad almeno un elemento W_j dello shrinking e quindi per costruzione $U_{x_1} \subseteq V_j$ e così via.

Il prossimo compito non banale è dimostrare che quest'ultimo ricoprimento è \mathcal{F} -aciclico; per costruzione su ogni intersezione finita $\Delta_{j_1} \cap \dots \cap \Delta_{j_p}$ il fascio $\mathcal{F}|_{\Delta_{j_1} \cap \dots \cap \Delta_{j_p}}$ è isomorfo come fascio olomorfo a $\mathcal{O}_{\Delta_{j_1} \cap \dots \cap \Delta_{j_p}}^{\oplus r}$ con $r := \text{rank}_{\mathbb{C}} \mathcal{F}$; quindi grazie al lemma precedente [3.3] per ottenere la \mathcal{F} -aciclicità del ricoprimento \mathcal{U} basterebbe provare che ogni tale intersezione finita è aciclica per il fascio delle funzioni olomorfe $\mathcal{O}_{\Delta_{j_1} \cap \dots \cap \Delta_{j_p}}$, usando soltanto il fatto *che quest'intersezione è contenuta in \mathbb{C}^n ed è composta da insiemi biolomorfi a polidischi*. Il problema serio con cui ci scontriamo è che una tale

¹**Teorema di Mittag-Leffler:** se U è un aperto qualsiasi non vuoto di \mathbb{C} allora $H^1(U; \mathcal{O}_U) = 0$.

intersezione in generale sar a molto complicata ed anche molto distante dall'essere biolomorfa ad un polidisco per cui abbiamo bisogno di un ragionamento abbastanza delicato: abbiamo a disposizione soltanto il teorema di Dolbeault che lavora su polidischi e niente di pi  (si pensi anche soltanto al caso monodimensionale in cui M   un disco aperto in \mathbb{C} contenente due aperti Δ_1 e Δ_2 non vuoti semplicemente connessi che quindi per il teorema di Riemann sono biolomorfi ad un disco; adesso Δ_1 e Δ_2 si possono intersecare in modo folle: dobbiamo dimostrare che una tale intersezione   aciclica per $\mathcal{O}_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$, ma ad esempio potremmo avere moltissime componenti connesse e dovremmo dimostrare che ciascuna componente   semplicemente connessa per avere qualche speranza di valutare H^1 : non   banale. Per inciso, in questo caso esiste il teorema di Mittag-Leffler che afferma l' \mathcal{O} -aciclicit  di qualsiasi aperto di \mathbb{C} , ma non funziona in dimensione pi  grande essendo una particolarit  degli aperti del piano complesso).

Il trucco furbo per risolvere la questione   questo:

Trucco del taglio: *si rappresenta biolomorficamente l'intersezione dei polidischi come sottovariet  lineare (i.e. intersezione finita di iperpiani) di un grande polidisco aperto di un certo \mathbb{C}^l e poi si forma un procedimento induttivo coomologico basato sulla successione strutturale di ogni sezione per concludere.*

Siano quindi $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ sottoinsiemi aperti di \mathbb{C}^n biolomorfi a polidischi n -dimensionali (non possiamo assumere che siano effettivamente polidischi per la struttura di \mathbb{C}^n dal momento che i cambi di carta, i.e. i biolomorfismi, non rispettano affatto una tale struttura); l'insieme $\Delta := \Delta_1 \times \dots \times \Delta_k \subseteq \mathbb{C}^{kn}$   un aperto di \mathbb{C}^{kn} biolomorfo ad un polidisco aperto kn -dimensionale, aciclico per il fascio delle sue funzioni olomorfe grazie al teorema di Dolbeault. Per comodit , diamo un nome particolare alle coordinate dell'ambiente del nuovo grande polidisco prodotto:

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n$$

$$(z_1^1, \dots, z_n^1; z_1^2, \dots, z_n^2; \dots; z_1^k, \dots, z_n^k)$$

Riusciamo a trovare una copia chiusa e biolomorfa di $\Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_k \subseteq \mathbb{C}^n$ dentro il prodotto $\Delta := \Delta_1 \times \dots \times \Delta_k \subseteq \mathbb{C}^{kn}$ in modo semplice? Consideriamo l'insieme:

$$D := \begin{cases} z_1^1 = z_1^2 = \dots = z_1^k \\ z_2^1 = z_2^2 = \dots = z_2^k \\ \dots \\ z_n^1 = z_n^2 = \dots = z_n^k \end{cases} \subseteq \Delta$$

ovvero l'intersezione di Δ con una sottovariet  lineare n -dimensionale definita dalle $n(k-1)$ equazioni precedenti; la scelta dell'insieme D   quella giusta come si vede facilmente usando l'applicazione olomorfa iniettiva, propria ed immersiva $\Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_k \longrightarrow D$ definita come:

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto (z_1, \dots, z_n; z_1, \dots, z_n; \dots; z_1, \dots, z_n)$$

e realizza un biolomorfismo tra la nostra intersezione di pseudopolidischi e la sottovariet  olomorfa D di Δ avendo una proiezione come inversa olomorfa.

Adesso l'aciclicit  del grande polidisco Δ   nota grazie al teorema di Dolbeault: dal momento che il nostro insieme D si ottiene tramite intersezione finita di Δ con iperpiani, cerchiamo portare avanti l'aciclicit  intersezione dopo intersezione.

Cominciamo a lavorare sul primo taglio $D_1 := \Delta \cap \{z_1^1 = z_1^2\}$, indichiamo con $i_1 : D_1 \hookrightarrow \Delta$ l'inclusione e teniamo ben presente che D_1   chiuso in Δ per costruzione; formiamo adesso il seguente diagramma con bypass:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{D_1; \Delta} & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Delta & \longrightarrow & i_{1*} \mathcal{O}_{D_1} \longrightarrow 0 \\ & & \cong \uparrow & & \nearrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Delta & \xrightarrow{(z_1^1 - z_1^2) \cdot} & & & \end{array}$$

La prima riga è la nota sequenza strutturale (per una descrizione più dettagliata si veda la fine di questa sezione) per la sottovarietà liscia lineare $\{z_1^1 - z_1^2 = 0\} \subseteq \Delta$; il morfismo analitico etichettato come $(z_1^1 - z_1^2) \cdot -$ nel bypass inferiore è indotto dalla moltiplicazione $\mathcal{O}_\Delta[V] \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta[V]$, $f \mapsto (z_1^1 - z_1^2)f$ ed è *iniettivo* (infatti se $(z_1^1 - z_1^2)f$ fosse identicamente nulla su Δ la funzione f dovrebbe essere nulla sul complemento dell'insieme $(z_1^1 - z_1^2 = 0) \cap \Delta$ in Δ che ne è un aperto denso). Per ottenere l'isomorfismo olomorfo tra \mathcal{O}_Δ ed il fascio-ideale $\mathcal{J}_{D_1;\Delta}$ presente nel bypass basta osservare che $\mathcal{J}_{D_1;\Delta}[V] = \{(z_1^1 - z_1^2)f \mid f \in \mathcal{O}_\Delta[V]\}$ dal momento che la sottovarietà D_1 è descritta globalmente da una funzione olomorfa lineare (quindi localmente irriducibile) che per i fatti base sulle sottovarietà divide localmente ogni funzione olomorfa che si annulla su D_1 .

Siccome Δ è aciclico per \mathcal{O}_Δ grazie a Dolbeault, Δ è aciclico anche per il fascio $i_{1*}\mathcal{O}_{D_1}$ e qui entra in gioco il fatto che D_1 è chiuso in Δ : infatti grazie alla chiusura $H^q(D_1; \mathcal{O}_{D_1}) \cong H^q(\Delta; i_{1*}\mathcal{O}_{D_1}) \cong 0$ se $q > 0$ (fatto base in coomologia; si veda la fine di questa sezione). Abbiamo mostrato che il primo taglio D_1 è aciclico per il proprio fascio di funzioni olomorfe, non resta che continuare a tagliare.

Procediamo con il secondo taglio via $z_1^2 = z_1^3$ formando la sottovarietà liscia $D_2 := \Delta \cap \{z_1^1 = z_1^2\} \cap \{z_1^2 = z_1^3\}$ di D_1 (nota che D_2 è ancora descritta globalmente da una funzione olomorfa localmente irriducibile essendo restrizione ad un oggetto lineare di un polinomio lineare) e consideriamo la solita successione strutturale bypassata, dove $i_2: D_2 \hookrightarrow D_1$ indica l'inclusione:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{D_2;D_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{D_1} & \longrightarrow & i_{2*}\mathcal{O}_{D_2} \longrightarrow 0 \\ & & \cong \uparrow & & \nearrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{D_1} & \xrightarrow{(z_1^2 - z_1^3) \cdot -} & & & \end{array}$$

e lo stesso ragionamento fatto con il primo taglio permette di concludere che anche questa volta $H^q(D_2; \mathcal{O}_{D_2}) \cong H^q(D_1; i_{2*}\mathcal{O}_{D_2}) \cong 0$ se $q > 0$.

Lo stesso procedimento può essere ripetuto esattamente per tutti gli altri tagli rimanenti; quindi dopo un totale di $n(k-1)$ sezionamenti con iperpiani otteniamo proprio D e la sua aciclicità per \mathcal{O}_D e questo conclude la dimostrazione. \square

Per completezza discutiamo brevemente la successione strutturale ed il risultato in teoria di Čech che abbiamo utilizzato nella dimostrazione precedente:

OSSERVAZIONE 3.5 (Successione strutturale). Sia M una varietà complessa ed N una sua sottovarietà liscia, ovvero per ogni $x \in N$ esiste un intorno aperto U di x in M ed un biolomorfismo tra U ed un aperto V di \mathbb{C}^m mandante la tripla $(x, U \cap N, U \cap M)$ nella tripla $(0, V \cap \mathbb{C}^n, Y \cap \mathbb{C}^m)$ (i.e. N è localmente olomorficamente piatta in M) ed indichiamo con $i: N \hookrightarrow M$ l'inclusione. Ogni funzione olomorfa f su un aperto U di M determina una funzione olomorfa $f \circ i$ definita sull'aperto $U \cap N$ di N e questo induce un morfismo $\mathcal{O}_M[U] \longrightarrow (i_*\mathcal{O}_N)[U] = \mathcal{O}_N[U \cap N]$ che essendo compatibile con la moltiplicazione per altre olomorfe induce morfismo di fasci $\mathcal{O}_M \longrightarrow i_*\mathcal{O}_N$; si tratta in realtà di un epimorfismo di fasci i.e. suriettivo su ogni spiga, dal momento che essendo N localmente olomorficamente piatta in M ci riconduciamo all'estensione di una funzione olomorfa f su $V \cap \mathbb{C}^n$ a tutto $V \cap \mathbb{C}^m$ che si ottiene banalmente per proiezione. Il fascio-kernel di questa mappa è chiaramente dato dall'associazione $U \mapsto \{f \in \mathcal{O}_M[U] \mid f \circ i = 0\}$ ovvero dall'insieme delle funzioni olomorfe dell'ambiente che si annullano identicamente sulla sottovarietà: quest'ultimo fascio viene indicato con il simbolo $\mathcal{J}_{N;M}$, il fascio ideale di N in M . Tautologicamente otteniamo un diagramma esatto di fasci e morfismi olomorfi chiamato comunemente *successione strutturale* della sottovarietà in questione:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{N;M} \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow i_*\mathcal{O}_N \longrightarrow 0$$

La successione lunga in coomologia descrive le ostruzioni incontrate nell'estendere una funzione olomorfa su N ad una funzione olomorfa globale su tutta M . Quando N non è più liscia, ma soltanto localmente luogo di zeri di un numero finito di germi olomorfi, possiamo definire il fascio delle *funzioni olomorfe* su N come $\mathcal{O}_N := i^* \left(\frac{\mathcal{O}_M}{\mathcal{J}_{N;M}} \right)$ (i.e. localmente restrizioni di funzioni olomorfe dell'ambiente) e tautologicamente si riottiene la successione strutturale.

Concludiamo con un lemma:

LEMMA 3.6. *Sia A uno spazio topologico e B un suo sottoinsieme chiuso con incisione $i: B \hookrightarrow A$; se \mathcal{F} è un fascio su B allora risulta:*

$$H^\bullet(A; i_*\mathcal{F}) \cong H^\bullet(B; \mathcal{F})$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con il notare che se $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di A allora la famiglia $\mathcal{U} \cap B := \{U_i \cap B\}_{i \in I}$ forma un ricoprimento aperto di B ; viceversa, ogni ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ di B si ottiene in questo modo, basta porre $U_i := V_i \cup (A - B)$ per ottenere il ricoprimento di A cercato (infatti ogni V_i è della forma $W_i \cap B$ per un certo aperto W_i di A e quindi siccome per chiusura $A - B$ è aperto l'insieme $V_i \cup (A - B)$ è aperto).

Inoltre dall'uguaglianza $(i_*\mathcal{F})[U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}] = \mathcal{F}[U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q} \cap B]$ per ogni $(q + 1)$ -upla (i_0, \dots, i_q) otteniamo una omomorfismo biiettivo $\varrho: C^q(\mathcal{U}; i_*\mathcal{F}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U} \cap B; \mathcal{F})$ che chiaramente commuta con gli operatori di cobordo di Čech; questo realizza un isomorfismo di complessi $C^\bullet(\mathcal{U}; i_*\mathcal{F}) \cong C^\bullet(\mathcal{U} \cap B; \mathcal{F})$ e quindi un isomorfismo in coomologia $\varrho^*: H^q(\mathcal{U}; i_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} H^q(\mathcal{U} \cap B; \mathcal{F})$. Per concludere, basta osservare che se \mathcal{V} è un raffinamento di \mathcal{U} allora anche $\mathcal{V} \cap B$ raffina $\mathcal{U} \cap B$ ed inoltre $\varrho^* \circ \text{raf}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = \text{raf}_{\mathcal{U} \cap B, \mathcal{V} \cap B} \circ \varrho^*$ commuta con i raffinamenti e quindi il morfismo passa in coomologia $H^q(A; i_*\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(B; \mathcal{F})$. Per l'osservazione iniziale sui ricoprimenti è un morfismo biiettivo. \square

4. Fasci di spazi di Fréchet

Il problema che vogliamo risolvere ha una natura olomorfa molto marcata: un enunciato simile nel caso analitico reale è generalmente falso (si pensi ad esempio alle funzioni analitiche reali 2π -periodiche su \mathbb{R} interpretate come sezioni analitiche del fibrato analitico reale banale su S^1). La rigidità prodotta dall'olomorfia permette di ottenere la finitezza grazie ad un risultato proveniente dall'analisi, *il teorema di perturbazione di Schwartz*. L'uso di queste tecniche richiede una struttura addizionale presente sui fasci olomorfi localmente liberi, assente nei fasci analitico-reali (per una descrizione precisa degli spazi e morfismi di Fréchet e delle seminorme si veda l'Appendice):

DEFINIZIONE 4.1 (Fascio di spazi Fréchet). Un fascio \mathcal{F} di \mathbb{C} -spazi vettoriali su una varietà complessa è detto fascio di spazi di Fréchet se per ogni aperto U di M l'insieme $\mathcal{F}[U]$ ha una fissata struttura di \mathbb{C} -spazio vettoriale di Fréchet e per coppia di aperti $U \supseteq V$ la corrispondente restrizione $r_{U,V}$ è lineare continua.

Per mostrare come ogni fascio olomorfo localmente libero ammetta una struttura di fascio di Fréchet iniziamo a lavorare con il fascio \mathcal{O}_M delle funzioni olomorfe (nessuna ipotesi di compattezza o connessione è fatta su M); come sappiamo, la paracompattatezza di M permette di costruirne un esaustione, ovvero una successione di compatti $\{K_n\}$ di M tali che $M = \bigcup_n K_n$ ed in modo che $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ per ogni n , dove quest'ultima relazione serve a garantire che ogni altro compatto di M sia contenuto in almeno un compatto dell'esaustione. Questo permette di definire la famiglia numerabile di seminorme $\{\|\cdot\|_{K_n}\}$ sullo spazio vettoriale complesso $\mathcal{O}[M]$ come:

$$\|f\|_{K_n} := \sup_{z \in K_n} |f(z)| \quad \forall f \in \mathcal{O}[M]$$

Da notare che se M fosse supposta connessa ed il compatto K_n avesse interno non vuoto la seminorma $\|-\|_{K_n}$ sarebbe una norma per unicità del prolungamento olomorfo; tuttavia come vedremo in seguito non potremo assumere la connessione per l'ambiente (si pensi a come è stato costruito il ricoprimento aciclico nella sezione precedente: *non potevamo avere alcun controllo sulla connessione delle intersezioni multiple*, ma solo sulla coomologia superiore). Inoltre, anche con le ipotesi di olomorfia la convergenza uniforme su un compatto ad interno non vuoto su un ambiente connesso ma non compatto dice ben poco su cosa accada al suo esterno per cui siamo in un certo senso obbligati ad usare una famiglia di seminorme.

Verifichiamo gli assiomi per uno spazio vettoriale di Fréchet; per ottenere l'assioma di Hausdorff basta osservare che se $f \in \mathcal{O}[M] - (0)$ allora in almeno un punto z_0 è non nulla; scegliendo allora un compatto K_{n_0} dell'esaustione che contiene z_0 risulta chiaramente $\|f\|_{K_{n_0}} \neq 0$. Per la completezza topologica notiamo che la topologia indotta dalle seminorme è uguale alla topologia compatto-aperta (come si verifica facilmente ricordando che ogni compatto è contenuto in almeno un compatto dell'esaustione) e quindi la convergenza coincide con la convergenza uniforme sugli insiemi compatti; per ottenere la completezza ci serve il seguente risultato:

TEOREMA 4.2. *Sia M una varietà complessa e supponiamo di avere una successione $\{f_n\}$ di funzioni olomorfe di M convergente uniformemente sui compatti ad una funzione f ; allora f è olomorfa.*

Da questo deduciamo che $\mathcal{O}[M]$ con le seminorme $\{\|-\|_{K_n}\}$ è uno spazio vettoriale di Fréchet. Inoltre se $U \subseteq M$ è un aperto il morfismo lineare di restrizione $r_{M,U}: \mathcal{O}[M] \longrightarrow \mathcal{O}[U]$ è continuo dal momento che tutti i nostri spazi di Fréchet sono metrizzabili quindi basta valutare la continuità per successioni (chiaramente la restrizione ad U di una successione di funzioni in M convergenti uniformemente sui compatti di M continua a convergere uniformemente sui compatti di U); quindi il fascio \mathcal{O}_M ha la struttura di fascio di Fréchet.

Un'altra informazione cruciale può essere dedotta dal seguente risultato:

TEOREMA 4.3 (Montel). *Sia M una varietà complessa; allora un sottoinsieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}[M]$ uniformemente limitato sui compatti (i.e. per ogni compatto K di M l'insieme $\{\|f\|_K \mid f \in \mathcal{A}\}$ è limitato) è relativamente compatto per la topologia compatto-aperta di $\mathcal{O}[M]$.*

Supponiamo che U sia un aperto *relativamente compatto* di M e consideriamo l'insieme $\{f \in \mathcal{O}[M] \mid \|f\|_{\bar{U}} < 1\}$, chiaramente aperto per la topologia compatta-aperta e quindi anche per quella indotta dalle seminorme; allora la sua immagine tramite restrizione ad U è uniformemente limitata sui compatti e per il teorema di Montel ha chiusura compatta. Quindi in questo caso la restrizione $r_{M,U}$ è un operatore compatto.

Il seguente teorema riassume tutto ciò che sappiamo sul fascio \mathcal{O}_M :

TEOREMA 4.4 (Secondo ingrediente). *Il fascio delle funzioni olomorfe \mathcal{O}_M di una varietà complessa M ha la struttura di fascio di Fréchet; inoltre se U è un aperto relativamente compatto di M allora l'omomorfismo di restrizione $r_{M,U}: \mathcal{O}[M] \longrightarrow \mathcal{O}[U]$ è un operatore lineare continuo e compatto.*

Il teorema precedente si estende senza difficoltà aggiuntive al caso di ogni fascio olomorfo libero, ovvero di una somma diretta finita del tipo $\mathcal{O}_M \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_M$, ricordando che per definizione $\mathcal{O}_M^{\oplus k}[U] := (\mathcal{O}_M[U])^{\oplus k}$ e ripetere quanto detto parola per parola; in questo modo otteniamo il risultato fondamentale affermando come *ogni fascio olomorfo localmente libero possa essere dotato localmente di struttura di fascio di spazi di Fréchet*. È possibile costruire anche una struttura di Fréchet globale, ma usando ricoprimenti abbastanza fini possiamo evitare quest'ultimo risultato e passare direttamente al teorema che ci interessa:

TEOREMA 4.5 (Finitezza). *Se M è una varietà complessa compatta e \mathcal{F} un suo fascio olomorfo localmente libero allora la coomologia di M a valori in \mathcal{F} è di tipo finito, ovvero:*

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^q(M; \mathcal{F}) &< \infty && \text{per ogni } q \\ H^q(M; \mathcal{F}) &= 0 && \text{per ogni } q > \dim_{\mathbb{C}} M \end{aligned}$$

Il secondo risultato è valido anche senza l'ipotesi di compattezza.

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo dalla seconda parte: se non fossimo stati ambiziosi e ci fossimo accontentati della banalità definitiva per una varietà compatta avremmo potuto usare le cocatene alterne per definire la coomologia di Čech (infatti scegliendo un ricoprimento \mathcal{F} -aciclico composto da l aperti avremmo ottenuto la banalizzazione del complesso di Čech dal grado $l+1$ compreso in poi per questioni di alternanza). Tuttavia per quanto dimostrato sulla coomologia di Dolbeault abbiamo a disposizione un'alternativa migliore che fornisce anche una risposta molto più precisa e generale, non dipendendo dall'ipotesi di compattezza; infatti possiamo usare il teorema di Dolbeault per ottenere una risoluzione fine del fascio delle funzioni olomorfe:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{A}_M^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_M^{0, \dim_{\mathbb{C}} M} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Tutti i fasci e i morfismi che compaiono sopra possono essere visti come fasci e morfismi olomorfi (\mathcal{O}_M -moduli, infatti come già osservato l'operatore $\bar{\partial}$ quando viene applicato a funzioni olomorfe fa zero per definizione di olomorfia) e quindi ne possiamo fare il prodotto \mathcal{O}_M -tensoriale con il fascio olomorfo \mathcal{F} ottenendo un nuovo complesso:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}_M^{0,0} \xrightarrow{1 \otimes \bar{\partial}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}_M^{0,1} \xrightarrow{1 \otimes \bar{\partial}} \dots \xrightarrow{1 \otimes \bar{\partial}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}_M^{0, \dim_{\mathbb{C}} M} \longrightarrow 0$$

(è essenziale lavorare con il prodotto tensoriale di \mathcal{O}_M -moduli per ottenere $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_M \cong \mathcal{F}$: un qualsiasi altro prodotto tensoriale, come tra fasci di \mathbb{C} -spazi vettoriali o di C_M^∞ -moduli, non funzionerebbe). Adesso il fatto che \mathcal{F} sia localmente libero rende *la successione di fasci sopra indicata ancora esatta*, come si vede osservando che ogni spiga di \mathcal{F} su x è isomorfa ad una somma diretta del tipo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}^{\oplus k}$ e quindi priva di torsione essendo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ -libera. Inoltre ogni termine $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}_M^{0,i}$ continua ad essere fine dal momento che usando il secondo fattore, lo si dota facilmente di struttura di fascio C_M^∞ (se ho una sezione $s := \{a_x \otimes_x b_x\}_{x \in U} \in (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}_M^{0,i})[U]$ con a_x germe in $(\mathcal{F})_x$, b_x germe in $(\mathcal{A}_M^{0,i})_x$ e \otimes_x il prodotto tensoriale di $(\mathcal{O}_M)_x$ -moduli, con i germi localmente provenienti da sezioni del prefascio allora il prodotto della sezione s per una funzione $f \in C_M^\infty[U]$ lo possiamo definire come $\{a_x \otimes_x f_x b_x\}_{x \in U}$ indotta dalla $(\mathcal{O}_M)_x$ -bilinare associata; si verifica facilmente che la definizione funziona).

In conclusione il complesso delle sezioni globali della seconda risoluzione fine può essere utilizzato per calcolare la coomologia voluta:

$$H^q(M; \mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}_M^{0,\bullet}[M]) = 0 \quad \text{se } q > \dim_{\mathbb{C}} M$$

Essendo il complesso di Dolbeault tensorizzato nullo in grado maggiore della dimensione complessa di M il risultato che cerchiamo segue immediatamente.

Passiamo adesso alla prima parte del teorema, ben più delicata, dove *la compattezza gioca un ruolo fondamentale*; utilizziamo il *primo ingrediente* e la compattezza di M per costruire ricoprimento aperto finito $\mathcal{U} := \{U_1, \dots, U_n\}$ \mathcal{F} -aciclico, composto da aperti sui quali il fascio \mathcal{F} si banalizza; poi ne costruiamo un raffinamento aperto finito $\mathcal{V} := \{V_1, \dots, V_m\}$ ancora \mathcal{F} -aciclico, con funzione di raffinamento $raf: \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ e soprattutto in modo che per ogni j valga la relazione $\overline{V_j} \subseteq U_{raf(j)}$ (la paracompattatezza garantisce l'esistenza del raffinamento-shrinking, poi basta raffinarlo ad uno \mathcal{F} -aciclico). Osserviamo che grazie alla compattezza di M ogni aperto V_j è relativamente compatto in $U_{raf(j)}$.

Dal momento che non dovremo più cambiare ricoprimenti scegliamo una volta per tutte i morfismi olomorfi di banalizzazione $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus k}$ (che di fatto inducono banalizzazioni $\mathcal{F}|_{V_j} \cong \mathcal{O}_{V_j}^{\oplus k}$); il *secondo ingrediente* permette di dotare ogni fascio ristretto $\mathcal{F}|_{U_i}$ della struttura di fascio di spazi di Fréchet indotta da quella canonica su $\mathcal{O}_{U_i}^{\oplus k}$. La stessa struttura passa chiaramente ad ogni altra restrizione $\mathcal{F}|_U$ con U aperto in certo U_i , ma questo ragionamento presenta tuttavia un piccolo problema: se abbiamo fissato banalizzazioni (e quindi struttura di Fréchet) ad esempio per $\mathcal{F}|_{U_i}$ e $\mathcal{F}|_{U_j}$ quale struttura si sceglie su $\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$? A priori potremmo ottenere strutture di Fréchet ben diverse, ma questo fortunatamente non può accadere; infatti in generale se abbiamo due diverse banalizzazioni di $\mathcal{F}|_W$, $\mathcal{O}_W^{\oplus k} \xleftarrow{\phi_1} \mathcal{F}|_W \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{O}_W^{\oplus k}$ allora l'automorfismo di fasci olomorfi $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}: \mathcal{O}_W^{\oplus k} \rightarrow \mathcal{O}_W^{\oplus k}$ è anche un automorfismo di fasci di Fréchet dal momento che per olomorfia esso si rappresenta come moltiplicazione per una $k \times k$ -matrice M (puntualmente invertibile) di funzioni olomorfe definite su W e una tale moltiplicazione rispettando la convergenza uniforme sui compatti risulta essere continua per la struttura di spazi di Fréchet. Dal momento che tutte le operazioni suddette commutano con le restrizioni ed in seguito saremo interessati essenzialmente a quest'ultime possiamo alleggerire le notazioni ed evitare di specificare quale banalizzazione è stata scelta.

Adesso osserviamo che le q -cocatene di Čech relative ad \mathcal{U} :

$$C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \bigoplus_{i_0, \dots, i_q} \mathcal{F}[U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}]$$

coinvolgono soltanto una somma diretta finita di spazi di sezioni di \mathcal{F} su aperti contenuti negli elementi del ricoprimento \mathcal{U} e quindi $C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ eredita una struttura di spazio di Fréchet; inoltre gli operatori di cobordo sono continui dal momento che se $c \in C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ è una q -cocatena allora il suo cobordo $\delta^q c \in C^{q+1}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ viene definito come:

$$(\delta^q c)(i_0, \dots, i_{q+1}) := \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j c(\dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots) |_{\dots \cap U_{i_{j-1}} \cap U_{i_{j+1}} \cap \dots}$$

e quindi δ^q è continuo essendo somma finita di restrizioni, continue sempre per il *secondo ingrediente*; in questo modo otteniamo un complesso di spazi di Fréchet e funzioni lineari continue:

$$0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^2} C^3(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^3} \dots$$

Lo stesso identico ragionamento può essere fatto per il complesso di Čech relativo al raffinamento.

Il primo fatto importante da notare è che ogni morfismo di raffinamento $raf_q^* : Z^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ indotto dalla funzione di raffinamento raf sui cocicli di Čech è un operatore continuo e compatto essendo una somma *finita* di restrizioni tra un aperto ed un aperto relativamente compatto, come è garantito dal *secondo ingrediente* dal momento che ad esempio ogni restrizione da un certo $U_{raf(j)}$ a V_j si identifica alla restrizione standard $\mathcal{O}[U_{raf(j)}]^{\oplus k} \rightarrow \mathcal{O}[V_j]^{\oplus k}$ sulla quale sappiamo lavorare e la stessa cosa vale per qualsiasi intersezione (per giustificare l'osservazione su raf_q^* indichiamo con $I := \{1, \dots, n\}$ e $J := \{1, \dots, m\}$ e facciamo alcune considerazioni sul morfismo indotto dalla funzione di raffinamento $raf : J \rightarrow I$; se $c \in C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ allora per definizione $(raf_q^* c)(j_0, \dots, j_q) := res c(raf(j_0), \dots, raf(j_q))$ dove res indica il morfismo di restrizione da $U_{raf(j_0)} \cap \dots \cap U_{raf(j_q)}$ al relativamente compatto $V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_q}$. In questa forma non è del tutto chiaro cosa sta succedendo; tuttavia se fissiamo $(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}$ allora il morfismo suddetto coincide sull'addendo $\mathcal{F}[U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}]$ di $C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ con la somma finita $\bigoplus_{j_0, \dots, j_q} res_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}, V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_q}}$ dove la sommatoria è estesa agli indici soddisfacenti $raf(j_0) = i_0, \dots, raf(j_q) = i_q$. Per linearità va tutto bene e quindi raf_q^* è veramente una somma finita di restrizioni su aperti relativamente compatti.)

Il secondo fatto è che grazie al teorema di Leray la funzione raf induce un isomorfismo $\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ e quindi in particolare raf_q^* induce una suriezione $Z^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow \frac{Z^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})}{\delta^{q-1}C^{q-1}(\mathcal{V}; \mathcal{F})}$ di \mathbb{C} -spazi vettoriali; grazie a quest'osservazione possiamo formare la seguente funzione:

$$\begin{aligned} proj : Z^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \oplus C^{q-1}(\mathcal{V}; \mathcal{F}) &\longrightarrow Z^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \\ \alpha \oplus \beta &\longmapsto raf_q^* \alpha + \delta^{q-1} \beta \end{aligned}$$

che per quanto detto sopra è una funzione lineare continua e suriettiva tra spazi di Fréchet (i cocicli di Čech essendo kernel di morfismi lineari e continui sono sottospazi chiusi e quindi hanno struttura di spazi di Fréchet). Per poter usare il teorema di Schwartz correttamente abbiamo bisogno di alcune funzione di supporto; cominciamo con una versione modificata di poco del raffinamento:

$$\begin{aligned} raf : Z^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \oplus C^{q-1}(\mathcal{V}; \mathcal{F}) &\longrightarrow Z^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \\ \alpha \oplus \beta &\longmapsto raf_q^* \alpha \end{aligned}$$

che è continua e compatta (infatti per costruzione ed il teorema di Montel raf_q^* manda un intorno A di $0 \in Z^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ in un relativamente compatto e quindi per costruzione anche l'intorno $A \oplus C^{q-1}(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ viene mandato nello stesso insieme); per finire rimodelliamo il cobordo:

$$\begin{aligned} bnd : Z^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \oplus C^{q-1}(\mathcal{V}; \mathcal{F}) &\longrightarrow Z^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \\ \alpha \oplus \beta &\longmapsto \delta^{q-1} \beta \end{aligned}$$

che chiaramente ha immagine $im(bnd) = im \delta^{q-1} = \delta^{q-1}C^{q-1}(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ ovvero proprio i cobordi di Čech. Conclusi questi preliminari possiamo finalmente applicare il teorema di perturbazione di Schwartz alla somma $bnd = proj - raf$ ($proj$ è suriettiva e raf è compatta) per ottenere che $coker(bnd)$ ha dimensione finita, ovvero:

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(coker(bnd) = \frac{Z^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})}{im(bnd)} = \frac{Z^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})}{\delta^{q-1}C^{q-1}(\mathcal{V}; \mathcal{F})} \cong H^q(M; \mathcal{F}) \right) < \infty$$

e questo finalmente conclude la dimostrazione del teorema di finitezza. \square

OSSERVAZIONE 4.6. Le idee fondamentali della dimostrazione precedente possono essere riciclate nel caso olomorfo-coerente; tuttavia, l'esistenza di un ricoprimento aciclico (primo ingrediente) diventa decisamente laborioso dovendo anche scegliere qual è il corretto sostituto coerente del polidisco (spazio di Stein). Analogamente dotare il fascio coerente di una struttura di fascio di Fréchet almeno localmente (secondo ingrediente) richiede l'esistenza di una qualche risoluzione libera sulla quale possiamo lavorare: queste sono le due grandi difficoltà che si presentano nel caso coerente.

5. Appendice: spazi di Fréchet

In questa appendice concusiva richiamiamo le definizioni ed i teoremi che abbiamo usato nella prova del risultato di finitezza; rimandiamo a testi come [18], [10] e [4] per maggiori dettagli e dimostrazioni precise dal che comunque non hanno assolutamente natura geometrica e possono quindi essere totalmente omesse in prima lettura.

Gli spazi vettoriali sui quali dobbiamo lavorare (i.e. spazi di funzioni olomorfe definite su varietà generalmente non compatte) non possono essere dotati di norme sensate, per cui risulta molto comodo iniziare ad indebolire il concetto di norma nel modo seguente:

DEFINIZIONE 5.1 (Seminorma). Una seminorma in un \mathbb{C} -spazio vettoriale V è una funzione $\varrho: V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ soddisfacente le seguenti relazioni:

- $\varrho(x + y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$ per ogni $x, y \in V$;
- $\varrho(\lambda x) = |\lambda| \varrho(x)$ per ogni $x \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Semplici verifiche mostrano che $\varrho(0) = 0$ ed inoltre $|\varrho(x) - \varrho(y)| \leq \varrho(x - y)$ per ogni $x, y \in V$; in generale la relazione $\varrho(x) = 0$ non implica che $x = 0$ e questa è difatto l'unica differenza con il concetto di norma. Una seminorma soltanto non permette di fare molto, ma in generale i nostri spazi saranno dotati di una famiglia *numerabile* di seminorme $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;

Famiglia numerabile di seminorme: esiste una famiglia numerabile $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di seminorme su V ;

una tale famiglia di seminorme permette di definire una topologia generata dai seguenti insiemi:

$$U_{\varepsilon, n}(x) := \{y \in V \mid \varrho_n(x - y) < \varepsilon\} \text{ al variare di } x \in V, n \in \mathbb{N} \text{ e } \varepsilon > 0$$

Per definizione gli aperti di questa topologia si ottengono tramite *unioni arbitrarie di intersezioni finite*; possiamo sostituire ciascun seminorma ϱ_n con la nuova seminorma $\sup\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}$ e quindi supporre in tutto quello che segue che $\varrho_n \leq \varrho_{n+1}$. Grazie a questa semplice osservazione si vede che gli insiemi del tipo $U_{\varepsilon, n}(0)$ formano un sistema fondamentale di intorni per lo 0 senza fare intersezioni finite.

Le operazioni di somma e dilatazione in V sono continue per questa topologia grazie alle relazioni di subadittività e omogeneità delle seminorme ed inoltre queste ultime sono continue (la topologia così definita è infatti la topologia più economica che rende continue tutte le seminorme); la struttura algebro-topologica ottenuta è la seguente:

DEFINIZIONE 5.2 (Spazio vettoriale topologico). Uno spazio vettoriale topologico è un \mathbb{C} -spazio vettoriale V dotato di una topologia rispetto alla quale le somme e le dilatazioni sono continue:

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V & V \times \mathbb{C} &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longmapsto x + y & (x, \lambda) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

Dalla definizione segue immediatamente che le traslazioni (ed anche le dilatazioni $\neq 0$) sono omeomorfismi e quindi per determinare la topologia di V basta conoscere un sistema fondamentale di intorni aperti del vettore 0.

La topologia indotta da una famiglia numerabile di seminorme di uno spazio vettoriale V è a base locale numerabile (ogni punto ha un sistema fondamentale numerabile di intorni) come si vede prendendo la famiglia di aperti del tipo $U_{\frac{1}{m}, n}(x)$ con $m, n \in \mathbb{N}$ ed inoltre ciascuno di questi insiemi è convesso (locale convessità per V). Ricapitoliamo cosa abbiamo ottenuto fin'ora:

Una famiglia numerabile di seminorme su uno spazio vettoriale V origina una topologia che rende V uno spazio vettoriale topologico, localmente convesso ed a base locale numerabile.

Tuttavia strutture del genere possono risultare del tutto inutili (si pensi ad una famiglia di seminorme tutte nulle) per cui qualche condizione addizionale deve essere imposta; per poter lavorare decentemente dobbiamo avere una struttura T_2 (punti distinti hanno intorni aperti disgiunti) ed una condizione sufficiente è data dalla seguente ipotesi:

Assioma di Hausdorff: Per ogni $x \in V - (0)$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\varrho_{n_0}(x) > 0$

Infatti, grazie agli omeomorfismi di traslazione, per valutare la separabilità basta riuscire a staccare 0 ed un qualsiasi punto $x \neq 0$ e se $\varrho_{n_0}(x) = \varepsilon > 0$ allora gli aperti $U_{\varepsilon/2, n_0}(0)$ e $U_{\varepsilon/2, n_0}(x)$ chiaramente non si toccano per subadittività di ϱ_{n_0} (senza insistere molto su questo punto la condizione sopra enunciata coincide esattamente con l'essere T_2).

L'ultima condizione che ci serve riguarda la completezza; le definizioni di successioni convergenti e di Cauchy sono ben note. Una successione $\{x_n\} \subseteq V$ converge ad un elemento $x \in V$ se per ogni intorno aperto U di 0 in V esiste un $n_0 > 0$ tale che se $n > n_0$ allora $x - x_n \in U$; analogamente la successione $\{x_n\} \subseteq V$ è detta di Cauchy

se per ogni intorno aperto U di 0 in V esiste un $n_0 > 0$ tale che se $m, n > n_0$ allora $x_m - x_n \in U$. Se, come nel nostro caso, la topologia di V è indotta da una famiglia di seminorme $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ allora la convergenza e l'essere di Cauchy si legge tramite tutte le ϱ_n , i.e. $\lim_k \varrho_n(x_k - x) = 0$ e $\lim_{k,l} \varrho_n(x_k - x_l) = 0$. La condizione da imporre è la completezza topologica per V , che nel nostro caso diventa la seguente:

Completezza topologica: se $\{x_n\}$ è una successione in V che è di Cauchy per ogni seminorma allora esiste un $x \in V$ alla quale la successione converge in ogni seminorma.

Tutti gli elementi finora descritti (famiglie numerabili di seminorme, Hausdorff e completezza) conducono al seguente concetto fondamentale (dove sottointendiamo molte delle costruzioni e definizioni date finora), rappresentante un notevole compromesso tra la regolarità degli spazi di Banach e l'eccessiva generalità dei generici spazi vettoriali topologici:

DEFINIZIONE 5.3 (Spazio di Fréchet (numerabile)). Un \mathbb{C} -spazio vettoriale V è chiamato spazio di Fréchet (numerabile) se esiste una famiglia numerabile di sue seminorme $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che:

- per ogni $x \in V - \{0\}$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\varrho_{n_0}(x) > 0$;
- se $\{x_n\}$ è una successione in V che è di Cauchy per ogni seminorma allora esiste un $x \in V$ alla quale la successione converge in ogni seminorma.

Una struttura del genere ha una topologia molto buona, infatti definendo la funzione:

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho_n(x - y)}{1 + \varrho_n(x - y)}$$

si ottiene una metrica su V ovviamente invariante per traslazioni che induce la stessa topologia ottenuta con le seminorme. Da questo punto di vista l'ipotesi fondamentale della base locale numerabile è sicuramente soddisfatta nei casi che ci interessano in queste note, tuttavia in analisi funzionale esistono spazi molto importanti che non possono soddisfare una tale condizione.

La definizione di spazio di Fréchet data sopra non è quella standard dal momento che di solito analisti danno la seguente:

DEFINIZIONE 5.4 (Spazio di Fréchet (numerabile)). Un \mathbb{C} -spazio vettoriale topologico V è detto spazio di Fréchet (numerabile) se:

- è localmente convesso;
- soddisfa l'assioma di Hausdorff;
- è topologicamente completo;
- ha un sistema fondamentale di intorni numerabile per lo 0 ;

Esattamente come accade per gli spazi di Banach, valgono i seguenti risultati elementari:

LEMMA 5.5. *Se V e W sono due spazi di Fréchet allora la somma diretta $V \oplus W$ ha una struttura naturale di spazio di Fréchet; ogni sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Fréchet eredita la struttura di spazio di Fréchet; se Z è un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Fréchet V allora il quoziente $\frac{V}{Z}$ ha la struttura di Fréchet.*

Come già notato i nostri spazi di Fréchet hanno sempre una base locale numerabile e sono quindi metrizzabili; in particolare i concetti di continuità, chiusura, compattezza e relativa compattezza possono essere valutati per successioni. Risulta quindi ben definito il concetto di applicazione lineare continua tra due spazi di Fréchet (nel caso non metrizzabile è necessaria maggiore cura) e la seguente definizione risulta determinante:

DEFINIZIONE 5.6 (Omomorfismo compatto). Una funzione lineare e continua $\phi : V \longrightarrow W$ tra due spazi Fréchet è detta compatta se esiste un intorno di 0 in V mandato da ϕ in un insieme relativamente compatto di W .

Il risultato fondamentale per la dimostrazione del teorema di finitezza è il seguente:

TEOREMA 5.7 (Teorema di Schwartz, [15]). *Siano V e W due spazi di Fréchet e supponiamo di avere:*

- $\phi: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare continua e suriettiva;
- $\psi: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare continua e compatta.

Allora l'immagine $im(\phi + \psi)$ è chiusa in W ed il conucleo $\frac{W}{im(\phi + \psi)}$ ha dimensione finita.

Altre dimostrazioni si trovano su [10] (approccio dei limiti inversi) e su [18] (approccio duale con il teorema di Mackey-Arens).

Bibliografia

- [1] A. Andreotti: *Nine lectures on complex analysis*. Notes of CIME course *Complex analysis, Bressanone 1973*.
- [2] A. Andreotti: *Note su un corso di geometria algebrica*. Scuola Normale Superiore a.a. 1977/78.
- [3] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris: *Geometry of algebraic curves, I*. Springer (1984).
- [4] H. Brezis: *Analisi Funzionale*
- [5] R.E. Edwards: *Functional analysis*. Holt, Rinehart and Winston (1965).
- [6] S. Eilenberg, N.E. Steenrod: *Foundations of algebraic topology*. Princeton Univ. Press (1952).
- [7] P. Griffiths: *Topics in algebraic and analytic geometry*. Princeton University press (1974).
- [8] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience publication (1978).
- [9] A. Grothendiek: *Espaces vectoriels topologiques*. IMPA São Paulo (1954).
- [10] R. Gunning, H. Rossi: *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall (1965).
- [11] S. Iitaka: *On D-dimension of algebraic varieties*. J. Math. Soc. Japan **23** (1971).
- [12] S. Lang: *Algebra*. Addison-Wesley, second edition (1984).
- [13] W. Rudin: *Functional analysis*. McGraw-Hill (1973).
- [14] H. Schaefer: *Topological vector spaces* Macmillan (1966), 2nd edition Springer-Verlag (1999).
- [15] L. Schwartz: *Homomorphismes et applications complètement continues*. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris **236** (1953) 2472-2473.
- [16] J.P. Serre: *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. of Math. **61** (1955) 197-278.
- [17] J.P. Serre: *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Ann. Inst. Fourier **6** (1956) 1-42.
- [18] J.L. Taylor: *Several complex variables with connections to Algebraic Geometry and Lie Groups*.
- [19] B. R. Tennison: *Sheaf Theory*, Cambridge University Press (1975).
- [20] H. Whitney: *Elementary structure of real algebraic varieties*. Ann. of Math. **66** (1957) 545-556.
- [21] O. Zariski: *The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface*. Ann. of Math. **76** (1962).